$y'' + 9y = \frac{1}{\sin 3x}$ $\qquad y(1) = -1 \quad y'(1) = 1$

1. а) Найдем аналитическое решение через уравнение 2-го порядка.
Из характеристического уравнения

$k^2 + 9 = 0$

находим $k_1 = 3i$, $k_2 = -3i$
Тогда общее решение однородного дифференциального уравнения

$y'' + 9y = 0$ представимо в виде

$Y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$

Решение неоднородного линейного уравнения будем искать методом вариации произвольной постоянной, т.к. правая часть не является функцией специального вида.
Полагаем $C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x)$,
$y_1 = \cos 3x$, $y_2 = \sin 3x$, и

$Y = C_1 y_1 + C_2 y_2.$

Определим функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ из системы

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0 \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = \frac{1}{\sin 3x} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos 3x + C_2'(x) \sin 3x = 0 \\ C_1'(x) \cdot (-3 \sin 3x) + C_2'(x) \cdot 3 \cos 3x = \frac{1}{\sin 3x} \end{cases}$$

Из 1го уравнения

$C_1'(x) = -tg3x \cdot C_2'(x)$, подставим во 2-е:

$(3\sin 3x \cdot tg3x + 3\cos 3x) \cdot C_2'(x) = \frac{1}{\sin 3x}$

Отсюда

$$C_2'(x) = \frac{1}{\sin 3x\left(3\frac{\sin^2 3x}{\cos 3x} + 3\cos 3x\right)} =$$

$$= \frac{\cos 3x}{3\sin 3x(\sin^2 3x + \cos^2 3x)} = \frac{1}{3}ctg3x$$

$C_1'(x) = -tg3x \cdot \frac{1}{3}ctg3x = -\frac{1}{3}$.

Интегрируем:

$C_1(x) = \int -\frac{1}{3}dx = -\frac{x}{3} + C_1$

$C_2(x) = \int \frac{1}{3}\frac{\cos 3x}{\sin 3x}dx = \frac{1}{9}\int \frac{d(\sin 3x)}{\sin 3x} = \frac{1}{9}\ln(\sin 3x) +$

$+ C_2$.

$\Rightarrow$ общее решение неоднородного линейного уравнения имеет вид

$y = \left(-\frac{x}{3} + C_1\right)\cos 3x + \left(\frac{1}{9}\ln\sin 3x + C_2\right)\sin 3x$

б) Найдем аналитическое решение через систему дифференциальных уравнений.

Введем переменную $y'=p$. Тогда $y''=p'$. Имеем систему уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} y'=p \\ p'=-9y+\frac{1}{\sin 3x} \end{cases}$$

имеем линейную неоднородную систему диф. уравнений с постоянными коэф-тами.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx}=0\cdot y+1\cdot p+0 \\ \frac{dp}{dx}=-9\cdot y+0\cdot p+\frac{1}{\sin 3x} \end{cases}$$

Найдем общее решение системы как сумму общего решения однородной системы и некоторого частного решения неоднородной.

Решаем однородную систему

$$\frac{dy}{dx}=0\cdot y+1\cdot p$$

$$\frac{dp}{dx}=-9\cdot y+0\cdot p$$

Выписываем матрицу A

$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 0 \end{pmatrix}$ и находим корни ее характеристического уравнения

-4-

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix}0&1\\-9&0\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\lambda&1\\-9&-\lambda\end{pmatrix}=$$

$$=\lambda^2+9=0$$

$$\lambda=3i;\ \lambda=-3i$$

Собственный вектор p_1 матрицы A отвечающий значению $\lambda=\lambda_1=3i$ находим из условия

$$(A-\lambda_1 I)\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}=0,\ \text{т.е.}$$

$$\begin{pmatrix}-3i&1\\-9&-3i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3ia_1+b_1\\-9a_1-3ib_1\end{pmatrix}=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-3ia_1+b_1=0\\-9a_1-3ib_1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1+\frac{bi}{3}=0\\a_1+\frac{bi}{3}=0\end{cases}$$

Зададим значение $a_1=1$, тогда $b_1=3i\Rightarrow p_1=(1;3i)$.

Собственный вектор p_2 матрицы A, соответствующий значению $\lambda=\lambda_2=-3i$ находим из условия

$$(A-\lambda_2 I)\begin{pmatrix}a_2\\b_2\end{pmatrix}=0,\ \text{т.е.}$$

$$\begin{pmatrix}3i&1\\-9&3i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_2\\b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3ia_2+b_2\\-9a_2+3ib_2\end{pmatrix}=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}3ia_2+b_2=0\\-9a_2+3ib_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_2-\frac{i}{3}b_2=0\\a_2-\frac{i}{3}b_2=0\end{cases}$$

Зададим $a_2=1$, тогда $b_2=-3i\Rightarrow p_2(1;-3i)$

Общее решение системы:

$$\bar{z}(x) = C_1 \cdot e^{3ix} \cdot \bar{p}_1 + C_2 \cdot e^{-3ix} \bar{p}_2$$

или

$$\bar{z}(x) = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3i \end{pmatrix} e^{3ix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3i \end{pmatrix} e^{-3ix}$$

Найдем частное решение системы полагая $C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x)$.

$$\begin{cases} C_1' \cdot e^{3ix} + C_2' \cdot e^{-3ix} = 0 \\ C_1' \cdot (3i) e^{3ix} - C_2' \cdot (3i) \cdot e^{-3ix} = \frac{1}{\sin 3x} \end{cases}$$

Из первого уравнения

$$C_1' = -C_2' e^{-6ix}$$

тогда

$$-C_2' \cdot 3i\, e^{-3ix} - C_2' \cdot 3i\, e^{-3ix} = \frac{1}{\sin 3x}$$

$$C_2' = \frac{e^{3ix}}{-6i \sin 3x} = \frac{i\cos 3x + i^2 \sin 3x}{6 \cdot \sin 3x} =$$

$$= \frac{i}{6} \operatorname{ctg} 3x - \frac{1}{6}$$

$$C_1' = -\frac{ie^{3ix}}{6 \sin 3x} \cdot e^{-6ix} = -\frac{ie^{-3ix}}{6 \sin 3x} = -\frac{i\cos 3x + 1 \sin 3x}{6 \sin 3x}$$

$$= -\frac{i}{6} \operatorname{ctg} 3x - \frac{1}{6}.$$

Интегрируем:

$$C_1(x) = -\frac{i}{6} \cdot \frac{1}{3} \ln \sin 3x - \frac{x}{6} + C_1$$

$C_2(x) = \frac{i}{6} \cdot \frac{1}{3} \ln \sin 3x - \frac{x}{6} + C_2$

$\Rightarrow$ решение неоднородной системы имеет вид

$$r_1(x) = \left(-\frac{i \ln \sin 3x}{18} - \frac{x}{6} + C_1\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3i \end{pmatrix} e^{3ix} +$$

$$+ \left(\frac{i \ln \sin 3x}{18} - \frac{x}{6} + C_2\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3i \end{pmatrix} e^{-3ix}$$

Найдем отсюда решение $y(x)$:

$$y(x) = \left(-\frac{i \ln \sin 3x}{18} - \frac{x}{6} + C_1\right) \cdot (\cos 3x + i \sin 3x) +$$

$$+ \left(\frac{i \ln \sin 3x}{18} - \frac{x}{6} + C_2\right) \cdot (\cos 3x - i \sin 3x) =$$

$$= \left(-\frac{x}{3} + C_1 + C_2\right) \cos 3x + \left(\frac{\ln \sin 3x}{9} + i(C_1 - C_2)\right) \times$$

$$\times \sin 3x$$

Переобозначив $C_1 + C_2 = C^*$ и $i(C_1 - C_2) = C^{**}$, получим решение

$$y(x) = \left(-\frac{x}{3} + C^*\right) \cos 3x + \left(\frac{\ln \sin 3x}{9} + C^{**}\right) \times$$

$$\times \sin 3x.$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(1)=-1$
$y'(1)=1$:

$$y=\left(-\frac{x}{3}+C_1\right)\cos 3x+\left(\frac{1}{9}\ln\sin 3x+C_2\right)\sin 3x$$

$$y'=-\frac{1}{3}\cos 3x-3\sin 3x\left(-\frac{x}{3}+C_1\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{9}\,\frac{1}{\sin 3x}\cdot\cos 3x\cdot 3\right)\cdot\sin 3x+\left(\frac{1}{9}\ln\sin 3x+\right.$$

$$\left.+C_2\right)\cdot 3\cos 3x=$$

$$=\cos 3x\left(-\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}\ln\sin 3x+3C_2\right)+$$

$$+\sin 3x\left(x-3C_1\right)$$

Подставляем н.у.:

$$\begin{cases}-1=\left(-\frac{1}{3}+C_1\right)\cos 3+\left(\frac{1}{9}\ln\sin 3+C_2\right)\sin 3\\ 1=\left(\frac{1}{3}\ln\sin 3+3C_2\right)\cos 3+\left(1-3C_1\right)\sin 3\end{cases}$$

$$C_1\left(\cos 3\right)+C_2\left(\sin 3\right)=\frac{1}{3}\cos 3-\frac{\sin 3}{9}\ln\sin 3-1$$

$$C_1\left(-3\sin 3\right)+C_2\left(3\cos 3\right)=1-\frac{1}{3}\ln\sin 3\cdot\cos 3-\sin 3$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}\cos 3 & \sin 3\\ -3\sin 3 & 3\cos 3\end{vmatrix}=3\cos^2 3+3\sin^2 3=3$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}\frac{1}{3}\cos 3-\frac{\sin 3}{9}\ln\sin 3-1 & \sin 3\\ 1-\frac{1}{3}\ln\sin 3\cdot\cos 3-\sin 3 & 3\cos 3\end{vmatrix}=$$

$$= \cos^2 3 - \cancel{\frac{1}{3}\sin 3\cos 3 \ln\sin 3} - 3\cos 3 - \sin 3 + \cancel{\frac{\sin 3\cos 3}{3}\ln\sin 3} + \sin^2 3 = 1 - 3\cos 3 - \sin 3.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos 3 & \frac{1}{3}\cos 3 - \frac{\sin 3}{9}\ln\sin 3 - 1 \\ -3\sin 3 & 1 - \frac{\cos 3}{3}\ln\sin 3 - \sin 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \cos 3 - \frac{\cos^2 3}{3}\ln\sin 3 - \cancel{\sin 3\cos 3} + \cancel{\sin 3\cos 3} - \frac{\sin^2 3}{3}\ln\sin 3 - 3\sin 3 = \cos 3 - 3\sin 3 - \frac{1}{3}\ln\sin 3$$

Тогда

$$C_1 = \frac{1 - 3\cos 3 - \sin 3}{3}$$

$$C_2 = \frac{\cos 3 - 3\sin 3 - \frac{1}{3}\ln\sin 3}{3}$$

и

$$y = \left(-\frac{x}{3} + \frac{1 - 3\cos 3 - \sin 3}{3}\right)\cos 3x + \left(\frac{\ln\sin 3x}{9} + \frac{\cos 3}{3} - \frac{3\sin 3 - \frac{1}{3}\ln\sin 3}{3}\right)\sin 3x = \left(-\frac{x}{3} + \frac{1}{3} - \cos 3 - \frac{\sin 3}{3}\right)\cos 3x +$$

$$+\left(\frac{\ln\sin 3x}{9} + \frac{\cos 3}{3} - \sin 3 - \frac{\ln\sin 3}{9}\right)\sin 3x.$$