№201

$$(x^2-y^2)\cdot y' = 2xy$$

$$y' = \frac{2xy}{x^2-y^2}$$

$$y' = \frac{2\cdot\frac{y}{x}}{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

имеем уравнение вида

$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ - однородное диф. уравнение.

Решаем заменой $u = \frac{y}{x}$, $y = ux$

$y' = xu' + u$.

Подставляя в исходное уравнение:

$$xu' + u = \frac{2\cdot u}{1-u^2}$$

$$xu' = \frac{2u}{1-u^2} - u$$

$$xu' = \frac{2u - u + u^3}{1-u^2}$$

$$x\frac{du}{dx} = \frac{u(1+u^2)}{1-u^2}$$

$$\frac{(1-u^2)du}{u(1+u^2)} = \frac{dx}{x}$$

Интегрируем:

$$\frac{1-u^2}{u(1+u^2)} = \frac{A}{u} + \frac{Bu+C}{1+u^2} = \frac{A+Au^2+Bu^2+Cu}{u(1+u^2)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ C=0 \\ A+B=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ C=0 \\ B=-2. \end{cases}$$

тогда

$$\int \frac{1-u^2}{u(1+u^2)}du = \int\frac{du}{u} - \int\frac{2udu}{1+u^2} =$$

$$= \int\frac{du}{u} - \int\frac{d(u^2+1)}{1+u^2} = \ln u - \ln(1+u^2) = \ln\frac{u}{1+u^2}$$

Тогда имеем

$$\ln\frac{u}{1+u^2} = \ln x + C_1$$

или

$$\frac{u}{1+u^2} = xC$$

Возвращаясь к исходной переменной

$$\frac{\frac{y}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = Cx$$

$$\frac{xy}{x^2+y^2} = Cx \quad \text{или}$$

$$\frac{y}{x^2+y^2} = C$$ — общий интеграл диф. уравнения

№202

$$(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$$

$$y' - \frac{2x}{1+x^2} \cdot y = 1+x^2 -$$

уравнение вида

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x)$$ – линейное уравнение.

Решаем заменой $y = u(x) \cdot v(x)$

$$y' = u' \cdot v + v' \cdot u$$

Подставляем:

$$u' \cdot v + v' \cdot u - \frac{2x}{1+x^2} \cdot u \cdot v = 1+x^2$$

$$v\left(u' - \frac{2x}{1+x^2} \cdot u\right) + v' \cdot u = 1+x^2$$

Выберем $u(x)$ так, чтобы

$$u' - \frac{2x}{1+x^2} \cdot u = 0.$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{2x}{1+x^2} \cdot u$$

$$\frac{du}{u} = \frac{2x\,dx}{1+x^2}$$

$$\ln u = \ln(1+x^2) \Rightarrow$$

$$u = 1+x^2.$$

Тогда

$$v' \cdot (1+x^2) = 1+x^2$$ или

$$v' = 1$$, отсюда

$$v = x + C$$

Учитывая, что $y = u(x)\cdot v(x)$, получим

$$y = (1+x^2)\cdot(x+C).$$

№2103

$$x\cdot y' = y\cdot \ln\frac{y}{x}$$

$$y' = \frac{y}{x}\cdot \ln\frac{y}{x}$$

Уравнение вида $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ - однородное. Решаем заменой

$\frac{y}{x} = u$, $y = ux$ $y' = xu' + u$.

Подставляем:

$$xu' + u = u\cdot \ln u$$

$$xu' = u\cdot(\ln u - 1)$$

$$x\cdot\frac{du}{dx} = u\cdot(\ln u - 1)$$

$$\frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x}$$

$$\frac{d(\ln u)}{\ln u - 1} = \frac{dx}{x}$$ интегрируем:

$\ln(\ln u - 1) = \ln x + C_1$ или

$$\ln u - 1 = C\cdot x$$

Возвращаемся к исходной переменной:

$\ln\frac{y}{x} - 1 = Cx$ - общий интеграл диф. уравнения.

Выразим y: $y = x\cdot e^{Cx+1}$.