Вариант 2. -1-

1) $\begin{cases} \dot{x} = 3x+y & x(0)=1 \\ \dot{y} = -x+y & y(0)=1 \end{cases}$

Решим систему сведением к одному уравнению (метод исключения)

$x = y - y'$ – из второго уравнения.

$x' = y' - y''$. Подставляем в первое:

$y' - y'' = 3y - 3y' + y$

$y'' - 4y' + 4y = 0$

Характеристическое уравнение

$k^2 - 4k + 4 = 0$ имеет корень $k=2$ второй кратности. Значит, общее решение имеет вид $y = (C_1 x + C_2)e^{2x}$. Тогда

$$x = y - y' = (C_1 x + C_2)e^{2x} - (C_1 e^{2x} +$$

$$+ 2(C_1 x + C_2) \cdot e^{2x})$$

$$x = (-C_1 x + (-C_1 - C_2))e^{2x}$$

Находим решение системы, удовлетворяющее начальным условиям:

$$\begin{cases} 1 = (-C_1 \cdot 0 - C_1 - C_2) \cdot e^0 \\ 1 = (C_1 \cdot 0 + C_2) \cdot e^0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = -1 \\ C_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -2 \\ C_2 = 1 \end{cases}$$

-2-

Тогда решение системы

$$\begin{cases} x = (2x+1)e^{2x} \\ y = (x-2)e^{2x} \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} \dot{x} = x+2z \\ \dot{y} = y-4z \\ \dot{z} = -x-2z \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x' = 1\cdot x + 0\cdot y + 2\cdot z \\ y' = 0\cdot x + 1\cdot y - 4\cdot z \\ z' = -1\cdot x + 0\cdot y - 2\cdot z \end{cases}$$

Выпишем матрицу A системы и найдем корни её характеристического уравнения

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & -4 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix}$$

$|A - \lambda I| = 0$:

$$(1-\lambda)(1-\lambda)(-2-\lambda) + 2(1-\lambda) = 0$$

$$(1-\lambda)(2 - (1-\lambda)(2+\lambda)) = 0$$

$\lambda_1 = 1$

$2 - (2 - \lambda - \lambda^2) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda = 0$

$\lambda_2 = -1$

$\lambda_3 = 0$

Найдем собственные векторы матрицы, соответствующие значениям λ.

$\lambda_1 = 1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2c_1 \\ -4c_1 \\ -a_1 - 3c_1 \end{pmatrix} = 0$$

Тогда имеем систему

$$\begin{cases} 2c_1 = 0 \\ -4c_1 = 0 \\ -a_1 - 3c_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ a_1 = 0 \\ b_1 - \text{любое.} \end{cases}$$

Задавая значение $b_1 = 1$ получим

$\overline{p}_1 = (0; 1; 0)$.

$\lambda_2 = -1$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a_2 + 2c_2 \\ 2b_2 - 4c_2 \\ -a_2 - c_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} a_2 + c_2 = 0 \\ b_2 + 2c_2 = 0 \\ a_2 + c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = -c_2 \\ b_2 = -2c_2 \end{cases}$$

Задавая значение $c_2 = -1$ получим

$\overline{p}_2\ (1; 2; -1)$.

$\lambda_3 = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a_3 + 2c_3 \\ b_3 - 4c_3 \\ -a_3 - 2c_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} a_3 = -2c_3 \\ b_3 = 4c_3 \\ a_3 = -2c_3 \end{cases}$$

Задавая значение $c_3 = 1$ получим

$\bar{p}_3(-2; 4; 1)$

Общее решение системы в векторном виде:

$$\bar{r}(x) = C_1 e^{\lambda_1 x}\bar{p}_1 + C_2 e^{\lambda_2 x}\bar{p}_2 + C_3 e^{\lambda_3 x}\bar{p}_3 \text{, или}$$

$$\bar{r}(x) = C_1 e^{x}\cdot(0\bar{i} + 1\bar{j} + 0\bar{k}) +$$
$$+ C_2 e^{-x}(\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}) +$$
$$+ C_3 e^{0}(-2\bar{i} + 4\bar{j} + \bar{k})$$

Собирая коэффициенты при ортах $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ получим решение системы:

$$\begin{cases} x = \qquad\qquad + C_2 e^{-x} - 2C_3 \\ y = C_1 e^{x} + 2C_2 e^{-x} + 4C_3 \\ z = \qquad\qquad - C_2 e^{-x} + C_3 \end{cases}$$

№3

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y + 4e^{-2t} \\ \dot{y} = 2x - 2y \end{cases}$$

Как и в задании (1) решим систему исключив одну из переменных.

Из второго уравнения:

$$x = \frac{y'}{2} + y.$$

$$x' = \frac{y''}{2} + y'.$$ Подставляем в первое

$$\frac{y''}{2} + \cancel{x'} = \cancel{x'} + 2y - 4y + 4e^{-2t}$$

$$\frac{y''}{2} + 2y = 4e^{-2t}$$

$$y'' + 4y = 8e^{-2t} \quad (*)$$

Составим характеристическое уравнение

$k^2 + 4 = 0$

Его корни $k_1 = 2i$ и $k_2 = -2i$

$\Rightarrow$ общее решение однородного уравнения

$Y = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t$.

Найдем частное решение неоднородного уравнения. Правая часть - функция специального вида,

$e^{\alpha t} \cdot P(t)$, где $\alpha = -2$, $P(t) = 8$.

Т.к. $\alpha = -2$ не является корнем характеристического уравнения, то решение ищем в виде $\tilde{y} = A \cdot e^{-2t}$;

$\tilde{y}' = -2Ae^{-2t}$

$\tilde{y}'' = 4Ae^{-2t}$. Подставляем:

$4Ae^{-2t} + 4Ae^{-2t} = 8e^{-2t} \Rightarrow A = 1$.

Тогда $\tilde{y} = e^{-2t}$ и $y(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t + e^{-2t}$ - общее решение уравнения $(*)$.

Найдем $x(t) = \frac{1}{2} y' + y = \frac{1}{2}(-2C_1 \sin 2t + 2C_2 \cos 2t - 2e^{-2t}) + C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t + e^{-2t}$

$\Rightarrow x = (C_1 + C_2)\cos 2t + (C_2 - C_1)\sin 2t - e^{-2t}$.

Тогда решение системы

$$\begin{cases} x = (C_1 + C_2)\cos 2t + (C_2 - C_1)\sin 2t - e^{-2t} \\ y = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t + e^{-2t}. \end{cases}$$