№12

12.2. $y''' - y'' = 6x^2 + 3x$

Введем замену

$y'' = z$, Тогда имеем уравнение

$z' - z = 6x^2 + 3x$ – линейное

Решаем заменой

$z = u \cdot v$, где u и v – функции от x.

$z' = u'v + v'u$

$u'v + v'u - uv = 6x^2 + 3x$

$v(u' - u) + v'u = 6x^2 + 3x$

$u' - u = 0$

$\frac{du}{u} = dx$

$\ln u = x$

$\underline{u = e^x}$

$v' \cdot e^x = 6x^2 + 3x$

$dv = (6x^2 + 3x)e^{-x}dx$

$v = \int (6x^2 + 3x)e^{-x}dx = \left| \begin{matrix} 6x^2 + 3x = u & e^{-x}dx = dv \\ (12x + 3)dx = du & -e^{-x} = v \end{matrix} \right|$

$= (6x^2 + 3x)\cdot(-e^{-x}) + \int e^{-x}(12x + 3)dx =$

$= \left| \begin{matrix} 12x + 3 = u & e^{-x}dx = dv \\ 12dx = du & -e^{-x} = v \end{matrix} \right| =$

=2=

$-(6x^2+3x)e^{-x}+(12x+3)(-e^{-x})+\int 12e^{-x}dx=$

$=-(6x^2+3x+12x+3+12)e^{-x}+C \Rightarrow$

$v=-(6x^2+15x+15)e^{-x}+C$

$z=e^{x}\cdot[-(6x^2+15x+15)e^{-x}+C)=$

$=-6x^2-15x-15+C\cdot e^{x}$

Возвращаясь к исходной переменной:

$y''=-6x^2-15x-15+Ce^{x}$

$y'=-6\cdot\frac{x^3}{3}-15\cdot\frac{x^2}{2}-15x+C_1e^{x}+C_2$

$y=-2\cdot\frac{x^4}{4}-\frac{15}{2}\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{15x^2}{2}+C_1e^{x}+C_2x+C_3$

$y=-\frac{x^4}{2}-\frac{5x^3}{2}-\frac{15x^2}{2}+C_1e^{x}+C_2x+C_3$

№ 13.2

$y'''-3y''+2y'=(1-2x)e^{x}$

Запишем характеристическое уравнение

$k^3-3k^2+2k=0$

$k(k^2-3k+2)=0$

$k_1=0$

$k_{2,3}=\frac{3\pm\sqrt{9-4\cdot2}}{2}$

$k_2=1$

$k_3=2$

Все корни первой кратности.

Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$Y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{2x}$$

Найдем частное решение $\tilde{y}$ неоднородного уравнения.
Правая часть уравнения имеет вид

$e^x \cdot (1-2x)$, т.е. $e^{\alpha x} \cdot P(x)$, где $\alpha = 1$ – корень характеристического уравнения 1й кратности. Поэтому частное решение ищем в виде $\tilde{y} = x \cdot e^x (A+Bx) = e^x(Ax+Bx^2)$

$$\tilde{y}' = e^x(Ax+Bx^2) + e^x \cdot (A+2Bx) = e^x(A+(A+2B)x+Bx^2)$$

$$\tilde{y}'' = e^x(A+(A+2B)x+Bx^2) + e^x(A+2B+2Bx) = e^x(2A+2B+(A+4B)x+Bx^2)$$

$$\tilde{y}''' = e^x(2A+2B+(A+4B)x+Bx^2) + e^x(A+4B+2Bx) = e^x(3A+6B+(A+6B)x+Bx^2)$$

Подставляем в уравнение:

$$e^x(3A+6B+(A+6B)x+Bx^2) + e^x(-6A-6B+(-3A-12B)x+(-3B)x^2) + e^x(2A+(2A+4B)x+2Bx^2) = e^x(1-2x).$$

Отсюда

приравнивая коэффициенты при соот- -4-
ветствующих степенях получим

$$\begin{cases} 3A+6B-6A-6B+2A=1 \\ A+6B-3A-12B+2A+4B=-2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A=-1 \\ -2B=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \end{cases}$$

Значит, частное решение имеет вид

$$\hat{y} = xe^x(x-1).$$

Тогда общее решение неоднородного уравнения

$$y = Y + \hat{y} = C_1 + C_2e^x + C_3e^{2x} + xe^x(x-1)$$

или $\underline{y = C_1 + (x^2 - x + C_2)e^x + C_3e^{2x}}$.

Замечание: задача 12.2 могла быть решена таким же способом.

№ 14.2

$$y'' - 4y' + 4y = -e^{2x}\sin 6x$$

Найдем общее решение однородного уравнения $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Составляем характеристическое уравнение

$$k^2 - 4k + 4 = 0$$

$$(k-2)^2 = 0$$

$k = 2$ - корень второй кратности.

Тогда общее решение однородного уравнения $Y = (C_1x + C_2)e^{2x}$

Правая часть $e^{2x}(-\sin 6x)$ представима в виде $e^{2x}(0\cdot\cos 6x+(-1)\sin 6x)$, где $\alpha=2$, $\beta=6$, $z=2+6i$, $P(x)=0$, $Q(x)=(-1)$.

т.к. $z\neq k_{1,2}$, то частное решение ищем в виде

$$\tilde{y}=e^{2x}(A\cos 6x+B\sin 6x)$$

$$\tilde{y}'=2e^{2x}(A\cos 6x+B\sin 6x)+e^{2x}(-6A\sin 6x+6B\cos 6x)=$$

$$=e^{2x}((2A+6B)\cos 6x+(2B-6A)\sin 6x)$$

$$\tilde{y}''=2e^{2x}((2A+6B)\cos 6x+(2B-6A)\sin 6x)+$$

$$+e^{2x}(-6(2A+6B)\sin 6x+6(2B-6A)\cos 6x)=$$

$$=e^{2x}((4A+12B+12B-36A)\cos 6x+$$

$$+(4B-12A-12A-36B)\sin 6x)=$$

$$=e^{2x}((-32A+24B)\cos 6x+(-32B-24A)\sin 6x)$$

Подставляем в уравнение:

$$e^{2x}((-32A+24B)\cos 6x+(-32B-24A)\sin 6x)+$$

$$+e^{2x}((-8A-24B)\cos 6x+(-8B+24A)\sin 6x)+$$

$$+e^{2x}(4A\cos 6x+4B\sin 6x)=$$

$$=e^{2x}((-1)\sin 6x)$$

Приравнивая коэффициенты при $\cos 6x$ и $\sin 6x$ получим

$$\begin{cases} -36A=0 \\ -36B=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=\frac{1}{36} \end{cases}$$

Тогда частное решение

$$\tilde{y}=\frac{1}{36}e^{2x}\sin 6x$$

Следовательно, общее решение неоднородного диф. уравнения имеет вид

$$y=Y+\tilde{y}=(C_1x+C_2)e^{2x}+\frac{1}{36}e^{2x}\sin 6x \text{ или}$$

$$\underline{y=\left(C_1x+\frac{1}{36}\sin 6x+C_2\right)e^{2x}.}$$

№15.2

$y''+y=2\sin x-6\cos x+2e^x$

Ищем общее решение однородного диф. уравнения $y''+y=0$

Характеристическое уравнение $k^2+1=0$ имеет корни $k_{1,2}=\pm i$.

$\Rightarrow$ общее решение однородного уравнения

$$Y=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

Определим частное решение уравнения

$y''+y=2\sin x-6\cos x$ (*)

$2\sin x-6\cos x=e^{0x}((-6)\cos x+2\sin x)$:

$\alpha=0,\ \beta=1,\ \gamma=i,\ P(x)=-6,\ Q(x)=2.$

Т.к. $\gamma=k_1$, то решение ищем в виде

$$\tilde{y}=x(A\cos x+B\sin x).$$

$\tilde{y}' = A\cos x + B\sin x + x(-A\sin x + B\cos x) =$

$\tilde{y}'' = -A\sin x + B\cos x + (-A\sin x + B\cos x) +$

$+ x(-A\cos x - B\sin x) =$

$= -2A\sin x + 2B\cos x + x(-A\cos x - B\sin x)$

Подставляем в уравнение (*)

$-2A\sin x + 2B\cos x + x(-A\cos x - B\sin x) +$

$+ x(A\cos x + B\sin x) =$

$= 2\sin x - 6\cos x$

Находим

$\begin{cases} -2A = 2 \\ 2B = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = -3 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Первое частное решение

$\tilde{y}_1 = x(-\cos x - 3\sin x)$.

Найдем частное решение уравнения

$y'' + y = 2e^x$ (**)

В правой части имеем выражение вида $e^{\alpha x} \cdot P(x)$, $\alpha = 1$, $P(x) = 2$. Т.к. $\alpha = 1$ не корень характеристического уравнения, то решение ищем в виде

$\tilde{y} = e^x \cdot A$.

$\tilde{y}' = Ae^x$

$\tilde{y}'' = A \cdot e^x$. Подставляем в уравнение (**)

$A \cdot e^x + A \cdot e^x = 2e^x$, откуда $A = 1$.

Т.о. $\tilde{y}_2 = e^x$.

Значит, общее решение исходного неоднородного уравнения

$$y = Y + \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 = C_1\cos x + C_2\sin x + x(-\cos x - 3\sin x) + e^x$$ или

$$\underline{y = (C_1 - x)\cos x + (C_2 - 3x)\sin x + e^x.}$$

№16.2

$$y'' + 3y' = \frac{9e^{3x}}{1+e^{3x}}, \quad y(0) = \ln 4, \quad y'(0) = 3(1-\ln 2)$$

Характеристическое уравнение:

$k^2 + 3k = 0$

$k_1 = 0 \quad k_2 = -3 \Rightarrow$ общее решение однородного уравнения имеет вид

$$Y = C_1 + C_2 e^{-3x}.$$

Т.к. правая часть не является функцией специального вида, решение неоднородного уравнения ищем методом Лагранжа.

$C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x)$, тогда имеем

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x)\cdot e^{-3x} = 0 \\ C_2'(x)\cdot(-3e^{-3x}) = \dfrac{9e^{3x}}{1+e^{3x}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_2' = \frac{-3e^{6x}}{1+e^{3x}}, \quad C_1' = \frac{3e^{3x}}{1+e^{3x}}$$