№3.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n+n}(x-2)^n$$

Найдем радиус сходимости степенного ряда по формуле

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^n}{2^n+n}\cdot\frac{2^{n+1}+n+1}{3^{n+1}}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{3}\,\frac{2^{n+1}+n+1}{2^n+n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{3}\cdot\frac{2+\overset{\to 0}{\frac{n+1}{2^n}}}{1+\underset{\to 0}{\frac{n}{2^n}}}\right| = \frac{2}{3}$$

Т.о. при $|x-2|<\frac{2}{3}$ ряд сходится

при $|x-2|>\frac{2}{3}$ - расходится.

Исследуем при $|x-2|=\frac{2}{3}$:

а) $x-2=\frac{2}{3}$: имеем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n+n}\,\frac{2^n}{3^n} =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2^n+n}.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^n+n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+\underset{\to 0}{\frac{n}{2^n}}} =$

$=1\neq 0$ то не выполняется необходимое условие сходимости ряда, ряд расходится.

б) $x-2=-\frac{2}{3}$: имеем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n+n}\cdot(-1)^n\cdot\frac{2^n}{3^n} =$

$=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^n}{2^n+n}$ - ряд знакочередующийся,

вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot a_n$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ (проверено выше) то ряд расходится.

Вывод: ряд сходится при $|x-2|<\frac{2}{3}$, т.е. на промежутке $\frac{4}{3}<x<\frac{8}{3}$.

№4. $f(x)=\frac{sh2x}{x}-2$

$f_1(x)=\frac{1}{x}$ и $f_2(x)=-2$ - уже разложены по степеням x при $x\in R$.

Разложим в ряд Тейлора функцию $f_3(x)=sh2x$.

Поскольку

$$sh\,t=t+\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}+\ldots+\frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots,\ t\in R,\text{ то}$$

$$sh2x=2x+\frac{(2x)^3}{3!}+\frac{(2x)^5}{5!}+\ldots+\frac{(2x)^{2n-1}}{(2n-1)!},\ x\in R.$$

Тогда для функции $f(x)$ имеет место разложение

$$f(x)=-2+\frac{2x}{x}+\frac{2^3\cdot x^3}{3!\,x}+\frac{2^5x^5}{5!\,x}+\ldots+\frac{2^{2n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!\,x}+\ldots$$

$$=\frac{2^3x^2}{3!}+\frac{2^5x^4}{5!}+\ldots+\frac{2^{2n-1}x^{2n-2}}{(2n-1)!}+\ldots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n+1}x^{2n}}{(2n+1)!},\ x\in R.$$

№5. $\int\limits_0^{0,2} \frac{\ln(1+x^2)}{x}dx$, 0,001.

Разложим функцию, стоящую под интегралом, в ряд по степеням x:

$$\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{(x^2)^2}{2} + \frac{(x^2)^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n} + \ldots$$

где $x \in (-1;1)$.

Тогда

$$\frac{\ln(1+x^2)}{x} = x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{n} + \ldots,$$

$$-1 \le x \le 1.$$

Тогда

$$\int\limits_0^{0,2} \frac{\ln(1+x^2)}{x}dx = \int\limits_0^{0,2}\left(x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{3} - \frac{x^7}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{n} + \ldots\right)dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2\cdot 4} + \frac{x^6}{3\cdot 6} - \frac{x^8}{4\cdot 8} + \ldots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n}}{n\cdot 2n} + \ldots\right)\Bigg|_0^{0,2}$$

Т.к. полученный ряд знакопеременный, то абсолютная погрешность не превышает первый отброшенный член.

Найдем значения

1) $\left.\frac{x^2}{2}\right|_{0,2} = 0,02 > 0,001$

2) $\left.\frac{x^4}{8}\right|_{0,2} = 0,0002 < 0,001.$

Т.о., для требуемой точности вычисления достаточно взять только первый член:

$$\int\limits_0^{0,2} \frac{\ln(1+x^2)}{x}dx = 0,02$$

№6. $y' = 2e^y + xy;\ y(0) = 0.$

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}\cdot x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

Найдем значения $\frac{y'(0)}{1!}$; $\frac{y''(0)}{2!}$ ... из уравнения:

$$y'(0) = 2e^{y(0)} + xy(0) = 2e^0 + \overset{=0}{x}\cdot 0 = 2.$$

$$y'' = (y')' = (2e^y + xy)' = 2y'\cdot e^y + x$$

$$y''(0) = 2\cdot 2\cdot e^0 + \overset{=0}{x} = 4 + 0 = 4$$

$$y''' = (y'')' = 2\cdot(y''\cdot e^y + (y')^2 e^y) + 1 \Rightarrow$$

$$y'''(0) = 2\cdot(4\cdot e^0 + (2)^2\cdot e^0) + 1 = 16 + 1 = 17.$$

Тогда

$$y(x) = 0 + \frac{2}{1!}x + \frac{4}{2!}x^2 + \frac{17}{3!}x^3 + \ldots$$

$y(x) = 2x + 2x^2 + \frac{17}{3}x^3$ – первые три отличные от нуля члена разложения

№7.

$$f(x)=\begin{cases}2, & -\pi<x\le 0\\ 1, & 0<x<\pi\end{cases}$$

Вычислим коэффициенты Фурье функции $f(x)$:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}2dx+\int_{0}^{\pi}dx\right)=\frac{1}{\pi}(2\pi+\pi)=3$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}2\cos nx\,dx+\int_{0}^{\pi}\cos nx\,dx\right)=$$

$$=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}2\sin nx\,dx+\int_{0}^{\pi}\sin nx\,dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{2\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{\cos nx}{n}\Big|_{0}^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi n}\left(-2+2\cos\pi n-\cos\pi n+1\right)=\frac{(-1)^n-1}{\pi n}$$

(т.к. $\cos\pi n=(-1)^n$)

Тогда $$b_n=\begin{cases}0, & n=2k\\ -\frac{2}{\pi n}, & n=2k+1,\quad k=0,1,2,\dots\end{cases}$$

В каждой точке непрерывности функция представима в виде:

$$f(x)=\frac{3}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$$

График функции изображен сплошной, график суммы — пунктиром.