№1.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$

Применим признак сравнения в предельной форме, будем сравнивать с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - так называемый гармонический ряд, расходится.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}} = 1 \neq 0, \infty$$

$\Rightarrow$ по признаку сравнения оба ряда сходятся либо расходятся одновременно.
Т.к. расходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, то расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1+n}{n^3}$

Применим признак сравнения в предельной форме. Сравним с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, табличный, сходится ($\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 1$ - сходится)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{1+n}{n^3}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{\sin \frac{1+n}{n^3}}{\frac{1+n}{n^3}}}_{\to 1} \cdot \frac{\frac{1+n}{n^3}}{\frac{1}{n^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n^2}}{1} = 1 \neq 0, \infty \Rightarrow$$

по признаку сравнения оба ряда сходятся либо расходятся одновременно.
Т.к. сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1+n}{n^3}$.

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$

Применим радикальный признак Коши в предельной форме.

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{\frac{1}{2}}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2-\frac{1}{n}}{3-\frac{1}{n}}}=\sqrt{\frac{2}{3}}<1\Rightarrow$ по радикальному признаку Коши ряд сходится.

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$

1. Исследуем ряд на абсолютную сходимость. Для этого составим ряд из модулей:
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$

Т.к. $\ln(n+1)<n+1$ $\forall n$, то

$\frac{1}{\ln(n+1)}>\frac{1}{n+1}$

ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ является расходящимся, значит, по признаку сравнения расходится и ряд с большим общим членом, т.е. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$. Т.е. исходный ряд абсолютно не сходится.

2. Исследуем на условную сходимость. Применим признак Лейбница, проверим два условия: а) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ и б) $a_{n+1}<$ $<a_n$ $\forall n$.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}=\left[\frac{1}{\infty}\right]=0$ - выполняется б) Т.к. $n+1 < n+2$ $\forall n$, а функция $y = \ln x$ является монотонно возрастающей на $(0;+\infty)$, то

$$\ln(n+1) < \ln(n+2).$$ Кроме того, $\ln(n+1) > 0$ $\forall n$. Тогда

$$\frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{\ln(n+2)} \quad \forall n$$

что и означает, что $a_{n+1} < a_n$ $\forall n$.

Т.о., все условия признака Лейбница выполнены $\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$ сходится условно.

№2

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^n} \cdot x^n$

Найдем радиус сходимости степенного ряда по формуле

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!\,(n+1)^{n+1}}{n^n \cdot (2n+2)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot\overbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}^{\to e}}{(2n+1)(2n+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{e\left(\overbrace{\frac{1}{n}}^{\to 0} + \overbrace{\frac{1}{n^2}}^{\to 0}\right)}{\left(2+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}\right)\left(2+\underbrace{\frac{2}{n}}_{\to 0}\right)} = 0$$

$\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^n} \cdot x^n$ сходится в единственной точке $x=0$.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{(n+2)\ln(n+2)}$

Найдем радиус сходимости ряда по формуле

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)\ln(n+2)}{(n+3)\ln(n+3)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\underbrace{\left(1+\frac{2}{n}\right)}_{\to 1}\ln(n+2)}{\underbrace{\left(1+\frac{3}{n}\right)}_{\to 1}\ln(n+3)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+2)}{\ln(n+3)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n+3}} = 1 \Rightarrow$$

При $|x|<1$ ряд сходится, при $|x|>1$ ряд расходится, при $|x|=1$ требует дополнительного исследования. Рассмотрим $x=1$ и $x=-1$.

а) При $x=1$ имеем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+2)\ln(n+2)}$.

Применим к нему интегральный признак сходимости. Рассмотрим несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{(x+2)\ln(x+2)} = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{d(\ln(x+2))}{\ln(x+2)} =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(\ln(\ln(x+2))\Big|_1^b\right) = \lim_{b\to\infty}\left(\ln\ln(b+3) - \right.$$

$\left. - \ln\ln 3\right) = \infty$. Т.к. расходится интеграл, то расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln(n+2)}$,

$\Rightarrow$ исходный степенной ряд расходится в точке $x=1$.

б) при $x=-1$ имеем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+2)\ln(n+2)}$, который расходится абсолютно (см. пункт а). Исследуем его на условную сходимость: проверяем два условия (признак Лейбница):

а. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

б. $a_{n+1} < a_n \ \forall n$.

а. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(n+2)\ln(n+2)} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0$ – выполняется

б. Т.к. $1 < n+2 < n+3 \ \forall n \in \mathbb{N}$ и функция $y=\ln x$ является монотонно возрастающей на промежутке $(0;+\infty)$, то

$$0 < \ln(n+2) < \ln(n+3) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\ln(n+2)} > \frac{1}{\ln(n+3)}$$

т.к. $1 < n+2 < n+3$, то

$$\frac{1}{n+2} > \frac{1}{n+3}$$ и значит

$$\frac{1}{(n+2)\ln(n+2)} > \frac{1}{(n+3)\ln(n+3)},$$ т.е.

$a_{n+1} < a_n$ – выполняется.

$\Rightarrow$ по признаку Лейбница ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+2)\ln(n+2)}$ сходится условно $\Rightarrow$ исходный степен-

ной ряд сходится в точке $x=-1$.
Т.о. область сходимости ряда $[-1;1)$.

№3

$$\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{3}}dx,\quad \varepsilon=0{,}001.$$

Воспользуемся табличным разложением

$$e^t=1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\ldots+\frac{t^n}{n!}+\ldots,\quad t\in R.$$

Тогда

$$e^{-\frac{x^2}{3}}=1+\frac{\left(-\frac{x^2}{3}\right)}{1!}+\frac{\left(-\frac{x^2}{3}\right)^2}{2!}+\ldots+\frac{\left(-\frac{x^2}{3}\right)^n}{n!}+\ldots,\ x\in R$$

или

$$e^{-\frac{x^2}{3}}=1-\frac{x^2}{3\cdot 1!}+\frac{x^4}{3^2\cdot 2!}+\ldots+\frac{(-1)^n\cdot x^{2n}}{3^n\cdot n!}+\ldots,x\in R$$

Тогда

$$\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{3}}dx=\int_0^1\left(1-\frac{x^2}{3\cdot 1!}+\frac{x^4}{3^2 2!}+\ldots+\frac{(-1)^n\cdot x^{2n}}{3^n\cdot n!}+\ldots\right)dx=$$

$$\left(x-\frac{x^3}{3\cdot 3\cdot 1!}+\frac{x^5}{5\cdot 3^2 2!}+\ldots+\frac{(-1)^n\cdot x^{2n+1}}{3^n\cdot(2n+1)\cdot n!}+\ldots\right)\Big|_0^1=$$

$$=1-\frac{1}{3\cdot 3\cdot 1!}+\frac{1}{5\cdot 3^2\cdot 2!}+\ldots+\frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)n!}+\ldots$$

Т.к. получен знакочередующийся ряд, то погрешность не превышает по абсолютной величине первого отброшенного члена ряда. Выясним, сколько членов ряда нужно взять для достижения требуемой точности.

$a_1 = 1 > 0{,}001$

$a_2 = -\frac{1}{9} \quad |a_2| = \frac{1}{9} > 0{,}001$

$a_3 = \frac{1}{5 \cdot 9 \cdot 2} = \frac{1}{90} > 0{,}001$

$a_4 = -\frac{1}{7 \cdot 27 \cdot 2 \cdot 3} = -\frac{1}{1134} \quad |a_4| < 0{,}001$

Значит, для достижения требуемой точности достаточно отбросить все члены ряда начиная с 4-го. Тогда

$$\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{3}} dx \approx 1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{90} = \frac{90 - 10 + 1}{90} = \frac{81}{90} = \frac{9}{10}$$

№4

$y' = y + y^2 \quad y(0) = 3.$

Разложение в степенной ряд решения $y(x)$ будем искать в виде

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!} \cdot x + \frac{y''(0)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n + \ldots$$

Т.к. $y(0) = 3 \neq 0$, то это первый отличный от 0 член разложения. Следовательно, нам необходимо определить коэффициенты $\frac{y'(0)}{1!}$ и $\frac{y''(0)}{2!}$ и задача будет решена.

$y'(0)$ найдем из диф. уравнения $y' = y + y^2$:

$y'(0) = y(0) + y^2(0) = 3 + 9 = 12$

$y''(0)$ найдем, продифференцировав равенство $y' = y + y^2$:

$y'' = y' + 2y \cdot y'$. Тогда

$y''(0) = y'(0) + 2y(0) \cdot y'(0) = 12 + 2 \cdot 3 \cdot 12 = 84.$

Тогда имеем:

$$y(x) \approx 3 + \frac{12}{1!}x + \frac{84}{2!}x^2$$

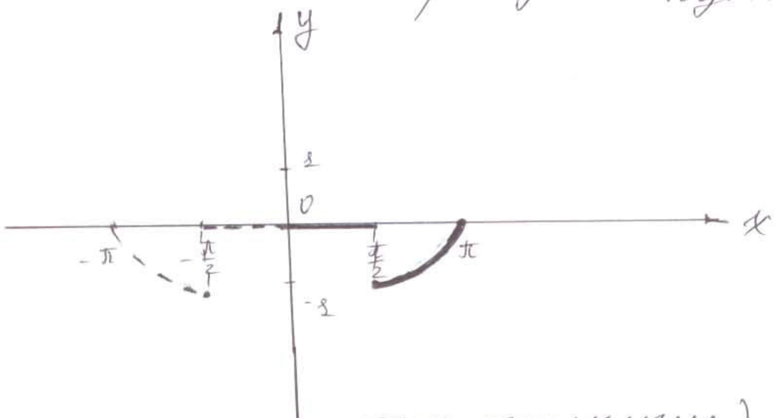
$$y(x) \approx 3 + 12x + 42x^2.$$

№ 5

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ -\sin x, & \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}$$ по косинусам

$l = \pi$.

Продолжим эту функцию четным образом как показано на рисунке пунктиром



(жирная линия – график функции).

Найдем $a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 0dx + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\sin x)dx\right) =$

$$= \frac{2}{\pi}\cos x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -\frac{2}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\cdot\cos nx\,dx = -\frac{2}{\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin x\cdot\cos nx\,dx =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{2}\left(\sin(x-nx)+\sin(x+nx)\right)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin(n-1)x\,dx - \frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin(n+1)x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{n-1}\cos(n-1)x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{n+1}\cos(n+1)x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{n-1}\cos(n-1)\pi + \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{n+1}\cos(n+1)\pi +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{n-1}\cos(n-1)\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{n+1}\cos(n+1)\frac{\pi}{2} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{n-1} + \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{n+1}, & n = 4k+1 \\ -\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{n-1} - \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{n+1}, & n = 4k+3 = 4k-1 \\ 0, & n = 4k,\ 4k+2. \end{cases}$$

$$a_n = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot\frac{2n}{\pi(n^2-1)},\quad n = 2m+1$$

Тогда $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$

$$f(x) = -\frac{1}{\pi} + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\cdot\frac{2(2m+1)}{\pi(4m^2+4m)}\cos(2m+1)nx$$

Построим график ряда Фурье, учитывая, что его значения в точках разрыва x_0
$f(x_0) = \frac{1}{2}\left(f(x_0-0) + f(x_0+0)\right)$.