Ряды

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+3)}$

Воспользуемся признаком сравнения в предельной форме. Сравнивать будем с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – гармонический ряд, расходится.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+2}{n(n+3)}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+2)}{n(n+3)} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+3}\right) = 1,$$

т.к. предел $\neq 0, \infty$, то ряды сходятся либо расходятся одновременно, т.о. исходный ряд расходится.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(2n-1)^2}$.

Воспользуемся признаком Даламбера в предельной форме.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(2(n+1)-1)^2}}{\frac{3^n}{(2n-1)^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3(2n-1)^2}{(2n+1)^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 3 \cdot \left(1 - \frac{3}{2n+1}\right)^2 = 3 > 1$$

Значит по признаку Даламбера ряд расходится.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{8n^3+1}$

Воспользуемся признаком сравнения в предельной форме. Сравним с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – гармонический, расходится.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{8n^3+1}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{8n^3+1}=\frac{1}{8}\neq 0,\infty$$

Значит, ряды сходятся либо расходятся одновременно. Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится, то расходится и исходный ряд.

4. а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\ln^3 n}$.

Исследуем ряд на абсолютную сходимость. Для этого составим ряд из модулей:

$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^3 n}$. Применим к этому ряду интегральный признак.

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x}=\int_2^{+\infty}\frac{d(\ln x)}{\ln^3 x}=\lim_{b\to+\infty}\int_2^{b}\frac{d(\ln x)}{\ln^3 x}=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(\left.\frac{\ln^{-2}x}{-2}\right|_2^b\right)=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{2\ln^2 b}+\frac{1}{2\ln^2 2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\ln^2 2}\neq\infty.$$

Поскольку сходится несобственный интеграл $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x}$, то сходится ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^3 n}$, тогда ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\ln^3 n}$ сходится абсолютно, а значит и просто сходится.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{n}{\sqrt{n^6+1}}$

Исследуем ряд на абсолютную сходимость. Для этого составим ряд из модулей:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^6+1}}$. Применим к нему признак сравнения в предельной форме, сравнивать будем с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ – табличный, сходится ($\sum\frac{1}{n^\alpha}$ – сходится при $\alpha>1$):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{\sqrt{n^6+1}}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{\sqrt{n^6+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^6}}}=1\neq 0,\infty$$

значит, оба ряда сходятся либо расходятся одновременно. Поскольку сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^6+1}}$ также сходится, а значит исходный ряд сходится абсолютно, следовательно и просто сходится.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{2^n\sqrt{n}}$. (при $n=0$ ряд не определен, поэтому считаем, что суммирование начинается все таки с $n=1$)

Найдем радиус сходимости ряда по формуле $R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n\sqrt{n}}{2^{n+1}\sqrt{n+1}}}=2$.

Тогда при $|x+2|<2$ ряд сходится,

при $|x+2|>2$ – расходится,

при $|x+2|=2$ требует дополнительных исследований.

Исследуем ряд на границе:

а) $x+2=2$. Тогда имеем числовой ряд

$\sum\limits_{n=1}\frac{2^n}{2^n\sqrt{n}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2}}$ – табличный ряд, расходится ($\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha\le 1$ – расходится) б) $x+2=-2$. Тогда имеем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{2^n\cdot\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

Абсолютно ряд расходится (

Исследуем на условную сходимость: применим признак Лейбница. Проверим условия а) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$ – выполняется. б) $a_n>a_{n+1}\ \forall n$:

$$n<n+1$$

$$\sqrt{n}<\sqrt{n+1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$ – выполняется.

Т.о. по признаку Лейбница ряд сходится. Тогда область сходимости ряда

$$-2\le x+2<2$$ или

$$0\le x<4.$$

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{(2n-1)^3}$.

Найдем радиус сходимости ряда по формуле

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot(2n-1)^3}{(2(n+1)-1)^3\cdot(n)}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^3\,n}{(n+1)(2n-1)^3}=1.$$ Тогда при

$|x|<1$ ряд сходится

$|x|>1$ ряд расходится

$|x|=1$ требует дополнительных исследований.

Исследуем ряд на границе.

а) $x=1$: имеем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n-1)^3}$.

Сравним данный ряд со сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ (табличный $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha>1$ - сходится). Воспользуемся предельной формой признака:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{(2n-1)^3}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{(2n-1)^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2-\frac{1}{n})^3}=\frac{1}{8}\neq 0,\infty$$

значит, оба ряда сходятся либо расходятся одновременно. Поскольку сходится $\sum\frac{1}{n^2}$, то и ряд $\sum\frac{n}{(2n-1)^3}$ сходится.

б) $x=-1$: имеем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{(2n-1)^3}$. Составим ряд из модулей: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n-1)^3}$. Этот ряд мы исследовали в пункте а), он сходится. Значит, сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(2n-1)^3}$.

Т.о. область сходимости исходного ряда

$$-1\le x\le 1.$$

7. $f(x)=\frac{1-e^{-x^2}}{x^2}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}\cdot e^{-x^2}$.

$\frac{1}{x^2}$ - уже разложена в ряд по степеням x. Разложим $g(x)=e^{-x^2}$.

Т.к. $$e^t=1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\ldots+\frac{t^n}{n!}+\ldots,\ t\in R,$$

то $$e^{-x^2}=1+\frac{-x^2}{1!}+\frac{(-x^2)^2}{2!}+\ldots+\frac{(-x^2)^n}{n!}+\ldots,\ x\in R$$

или $$e^{-x^2}=1+\frac{-x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}+\ldots+\frac{(-1)^n\cdot x^{2n}}{n!}+\ldots,\ x\in R.$$

Тогда

$$f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}\cdot\left(1+\frac{-x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}+\ldots+\frac{(-1)^n\cdot x^{2n}}{n!}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}+\frac{x^2}{x^2\cdot 1!}-\frac{x^4}{x^2\cdot 2!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}\cdot x^{2n}}{x^2\cdot n!}+\ldots=$$

$$=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}\cdot x^{2(n-1)}}{n!}+\ldots$$

или $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot x^{2(n-1)}}{n!}$, $x\in R$.

8. $\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\cos\sqrt{x}\,dx$.

Разложим подынтегральную функцию в ряд Тейлора.

Т.к. $\cos t=1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}+\ldots+(-1)^n\cdot\frac{t^{2n}}{(2n)!}+\ldots$, $t\in R$,

то $\cos\sqrt{x}=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4!}+\ldots+(-1)^n\cdot\frac{x^n}{(2n)!}+\ldots$, $x\geq 0$.

тогда $\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\cos\sqrt{x}\,dx=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{(2n)!}+\ldots\right)dx=$

$$=\left(x-\frac{x^2}{2\cdot 2}+\frac{x^3}{3\cdot 4!}+\ldots+(-1)^n\cdot\frac{x^{n+1}}{(n+1)(2n)!}+\ldots\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 4!\cdot 2^3}+\ldots+(-1)^n\cdot\frac{1}{2^{n+1}(n+1)\cdot(2n)!}+\ldots$$

Поскольку ряд знакочередующийся, то абсолютная погрешность не превышает первого отброшенного члена. Т.к.

$n=1$: $\frac{1}{2}=0,5>0,001$

$n=2$: $\frac{1}{4\cdot 2^2}=\frac{1}{16}=0,0625>0,001$

$n=3$: $\frac{1}{3\cdot 4!\cdot 2^3}=\frac{1}{576}=0,0017>0,001$

$n=4$: $\frac{1}{4\cdot 6!\cdot 2^4}=\frac{1}{46080}\approx 0{,}00002<0{,}001$,

то отбросить можно все члены начиная с четвертого.

Тогда имеем:

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\cos\sqrt{x}\,dx\approx\frac{1}{2}-\frac{1}{16}+\frac{1}{576}=\frac{288-36+1}{576}=\frac{253}{576}\approx \underline{0{,}44}.$$

9. $f(x)=x^2$, $T=4$, $(-2;2)$, $\ell=\frac{T}{2}=2$

Найдем коэффициенты Фурье.

Поскольку функция четная, то $b_k=0$.

$$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=\frac{8}{3}.$$

$$a_k=\frac{2}{2}\int_0^2 x^2\cos\frac{\pi kx}{2}dx$$

$$\int x^2\cos\frac{\pi kx}{2}dx=\left|\begin{array}{ll} x^2=u & \cos\frac{\pi kx}{2}dx=dv \\ du=2xdx & \frac{2}{\pi k}\sin\frac{\pi kx}{2}=v\end{array}\right|=$$

$$=x^2\cdot\frac{2}{\pi k}\sin\frac{\pi kx}{2}-\frac{4}{\pi k}\int x\sin\frac{\pi kx}{2}dx=$$

$$\left|\begin{array}{ll} x=u & \sin\frac{\pi kx}{2}dx=dv \\ dx=du & -\frac{2}{\pi k}\cos\frac{\pi kx}{2}=v\end{array}\right|=\frac{2x^2}{\pi k}\sin\frac{\pi kx}{2}-$$

$$-\frac{8x}{\pi^2k^2}\cos\frac{\pi kx}{2}+\frac{8}{\pi^2k^2}\int\cos\frac{\pi kx}{2}dx=\frac{2x^2}{\pi k}\sin\frac{\pi kx}{2}$$

$$-\frac{8x}{\pi^2k^2}\cos\frac{\pi kx}{2}+\frac{16}{\pi^3k^3}\sin\frac{\pi kx}{2}+C.$$

Тогда

$$a_k = \frac{8}{\pi k}\sin\underbrace{\frac{2\pi k}{2}}_{=0} - \frac{16}{\pi^2 k^2}\cos\frac{2\pi k}{2} + \frac{16}{\pi^3 k^3}\sin\underbrace{\frac{2\pi k}{2}}_{=0}$$

$$= -\frac{16\cdot(-1)^k}{\pi^2 k^2} = \frac{16\cdot(-1)^{k+1}}{\pi^2 k^2}$$

Получаем, что

$$x^2 = \frac{4}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\cdot 16}{\pi^2 k^2}\cos\frac{\pi k x}{2}.$$

10. Запишем заданную функцию аналитически:

$y = \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}$; промежуток $(0;\pi)$.

Для разложения данной функции в ряд по синусам продолжим её на интервал $(-\pi;0)$ нечетным образом. Тогда коэффициенты $a_n = 0$, а

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}\right)\sin nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx - \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx.$$

$$\int x\sin nx\,dx = \left| \begin{matrix} x = u & \sin nx\,dx = dv \\ du = dx & -\frac{1}{n}\cos nx = v \end{matrix} \right| =$$

$$= -\frac{x}{n}\cos nx + \frac{1}{n}\int\cos nx\,dx = -\frac{x}{n}\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx + C.$$

$\int \sin nx\,dx = -\frac{1}{n}\cos nx$. Тогда

$$b_n = \frac{1}{\pi}\cdot\left(-\frac{\pi}{n}\cos\pi n + \frac{1}{n^2}\underbrace{\sin\pi n}_{=0}\right) + \frac{1}{2n}\cos\pi n - \frac{1}{2n} =$$

$$= -\frac{1}{n}(-1)^n + \frac{1}{2n}(-1)^n - \frac{1}{2n} = \frac{(-2+1)\cdot(-1)^n - 1}{2n} =$$

$$= \frac{(-1)^{n+1} - 1}{2n}.$$ Тогда имеем разложение:

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}-1}{n}\cdot\sin nx.$$