=1=

№2.8.

1) а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3n+n^3}{4+n+4n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\overset{\to 0}{\frac{1}{n^3}}+\overset{\to 0}{\frac{3}{n^2}}+1}{\underset{\to 0}{\frac{4}{n^3}}+\underset{\to 0}{\frac{1}{n^2}}+4}=\dfrac{1}{4}$

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+6n^2-1}-n\right)=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt[3]{n^3+6n^2-1}-n\right)\left(\sqrt[3]{(n^3+6n^2-1)^2}+n\sqrt[3]{n^3+6n^2-1}+n^2\right)}{\sqrt[3]{(n^3+6n^2-1)^2}+n\sqrt[3]{n^3+6n^2-1}+n^2}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+6n^2-1-n^3}{\sqrt[3]{(n^3+6n^2-1)^2}+n\sqrt[3]{n^3+6n^2-1}+n^2}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6-\overset{\to 0}{\frac{1}{n^2}}}{\sqrt[3]{\left(1+\underset{\to 0}{\frac{6}{n}}-\underset{\to 0}{\frac{1}{n^3}}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\underset{\to 0}{\frac{6}{n}}-\underset{\to 0}{\frac{1}{n^3}}}+1}=\dfrac{6}{3}=2$

2) а) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-x}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}-1}{1+\frac{1}{x}}=-2$

(пояснение: $\dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x}=\dfrac{\sqrt{x^2+3}}{-|x|}$, поскольку $x<0$, т.к. $\to-\infty$. Значит $\dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x}=-\sqrt{\dfrac{x^2+3}{x^2}}=-\sqrt{1+\dfrac{3}{x^2}}$)

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{\frac{1}{x}}}{5^{\frac{1}{x}}+2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\underset{\to+\infty}{\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{x}}}+\underbrace{\frac{2}{\underset{\to+\infty}{4^{\frac{1}{x}}}}}_{\to 0}}=\left[\dfrac{1}{+\infty}\right]=0$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4-3x^2}-2}{1-\cos^3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{4-3x^2}-2\right)\left(\sqrt{4-3x^2}+2\right)}{\left(\sqrt{4-3x^2}+2\right)(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2x)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-3\overset{\to 2}{x^2}}{\left(\sqrt{4-3x^2}+2\right)(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2x)}=\dfrac{-3\cdot 2}{4\cdot 3}=-\dfrac{1}{2}$

$=2=$

г) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^4\cdot\left(\frac{x^2+3}{x^2+4x+3}\right)^x=[1^\infty]=$

$=e^4\cdot\lim\limits_{x\to-\infty}\overbrace{\left(1+\frac{-4x}{x^2+4x+3}\right)^{\frac{x^2+4x+3}{-4x}}}^{\to e}\cdot\frac{-4x\cdot x}{x^2+4x+3}=$

$=e^4\cdot\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{-4x^2}{x^2+4x+3}}=e^4\cdot e^{-4}=1.$

д) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{\ln(x^2+1)-\ln(x^2-x)}{\sin(x+1)}=\lim\limits_{x\to-1}\frac{\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-x}\right)}{\underbrace{\frac{\sin(x+1)}{x+1}}_{\to1}\cdot(x+1)}=$

$=\lim\limits_{x\to-1}\frac{\overbrace{\ln\left(1+\frac{x+1}{x^2-x}\right)}^{\to1}}{\frac{x+1}{x^2-x}\cdot x^2-x}=\lim\limits_{x\to-1}\frac{1}{x^2-x}=\frac{1}{2}$

е) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{2x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x\overbrace{(1-e^x)}^{\to-1}}{x}=-e^0=-1.$

з) $\alpha(x)=\frac{e^{\frac{4}{x}}-1}{\sqrt{x^2+1}-x},\quad x\to-\infty$

По определению порядка малости найдем

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{\frac{4}{x}}-1}{\sqrt{x^2+1}-x}\cdot x^k=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(e^{\frac{4}{x}}-1)\cdot x^k}{\underbrace{\frac{4}{x}}_{\to1}\cdot\frac{x}{4}\cdot|x|\cdot\underbrace{\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}_{\to2}}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2x^k}{x^2}=\begin{cases}0, & k<2\\ -2, & k=2\\ \infty, & k>2\end{cases}\Rightarrow k=2.$

Т.о. $\frac{c}{x^k}=-\frac{2}{x^2}.$

№ 4

а) $f_1(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x+3} + \frac{\sin(x-2)}{x^2-4}$

Точки разрыва: $x=-3$; $x=\pm 2$

1. $x=-3$:

$$\lim_{x\to -3-0}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x+3} + \frac{\sin(x-2)}{x^2-4}\right) = -\frac{\pi}{2} + \frac{\sin(-5)}{5}$$

$$\lim_{x\to -3+0}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x+3} + \frac{\sin(x-2)}{x^2-4}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\sin 5}{5}$$

$\lim\limits_{x\to -3-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to -3+0} f(x)$, но оба существуют и конечны $\Rightarrow$ точка разрыва I рода, скачок

2. $x=-2$:

$$\lim_{x\to -2-0}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x+3} + \frac{\sin(x-2)}{x^2-4}\right) = \left[\frac{\pi}{4} - \frac{\sin 4}{0}\right] = \infty$$

$$\lim_{x\to -2+0}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x+3} + \frac{\sin(x-2)}{x^2-4}\right) = \left[\frac{\pi}{4} - \frac{\sin 4}{0}\right] = \infty$$

оба предела бесконечны $\Rightarrow$ точка разрыва II рода

3. $x=2$:

$$\lim_{x\to 2-0}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x+3} + \overbrace{\frac{\sin(x-2)}{(x-2)(x+2)}}^{\to 1}\right) = \operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to 2+0}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x+3} + \frac{\sin(x-2)}{(x-2)(x+2)}\right) = \operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \frac{1}{4}$$

Оба предела существуют, конечны и равны $\Rightarrow$ точка разрыва I рода, устранимый разрыв.

в) $f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2-9}, & x \le 0 \\ \dfrac{x \sin(x^3-1)}{x-1}, & x > 0 \end{cases}$

$x=-3$; $x=0$; $x=1$.

а) $x=-3$:

$$\lim_{x\to -3-0} f(x) = \lim_{x\to -3-0} \frac{x}{x^2-9} = \infty$$

$$\lim_{x\to -3+0} f(x) = \lim_{x\to -3+0} \frac{x}{x^2-9} = \infty$$

$\Rightarrow$ точка разрыва II рода

б) $x=0$:

$$\lim_{x\to -0} f(x) = \lim_{x\to -0} \frac{x}{x^2-9} = 0$$

$$\lim_{x\to +0} f(x) = \lim_{x\to +0} \frac{x \sin(x^3-1)}{x-1} = 0$$

$$f(0)=0$$

Т.к. $\lim\limits_{x\to -0} f(x) = \lim\limits_{x\to +0} f(x) = f(0)$, то функция непрерывна в точке $x=0$

в) $x=1$:

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} \frac{x \sin(x^3-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1-0} x(x^2+x+1) = 3$$

аналогично $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = 3$.

Т.к. $f(x)$ не определена при $x=1$, то $x=1$ – точка разрыва I рода, устранимой разрыв.

5) а) $$y' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}\cdot\frac{5}{3}}}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{2x(1-x^2)+2x(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$$

$$y'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{5}{3}\cdot\frac{5}{3}}}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{16}{9}.$$

б) $$y' = \frac{40}{1+\left(\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\cdot\frac{1+\sqrt{1-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{(1+\sqrt{1-x^2})^2}$$

$$y'\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{40}{1+\left(\frac{3}{5\left(1+\sqrt{\frac{16}{25}}\right)}\right)^2}\cdot\frac{1+\frac{4}{5}+\frac{9\cdot 5}{25\cdot 4}}{\left(1+\frac{4}{5}\right)^2} =$$

$$= \frac{40}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2}\cdot\frac{\frac{9}{5}+\frac{9}{20}}{\left(\frac{9}{5}\right)^2} = \frac{9\cdot 40}{10}\cdot\frac{\frac{9}{4}}{\frac{81}{25}} =$$

$$= 36\cdot\frac{\cancel{9}\cdot 25}{4\cdot\cancel{9}\cdot\cancel{9}} = 25$$

в) $$y' = \frac{1}{2}\cdot 2\,tg\,x\cdot\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)$$

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1\cdot\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} + 1 = 3$$

6) $$y' = \frac{1}{2}\cdot\frac{\cancel{1-x}}{1+x}\cdot\frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)\cancel{2}} = \frac{1}{1-x^2}$$

$$y'' = \frac{+2x}{(1-x^2)^2}$$

$$y''\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{16}{9}.$$

7. $z = x^y$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \cdot \ln x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (x^y \cdot \ln x)'_x = y \cdot x^{y-1} \cdot \ln x + x^y \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= (y \ln x + 1) \cdot x^{y-1}$$

Подставляем:

$$y \cdot (y \ln x + 1) \cdot x^{y-1} - (1 + y \ln x) \cdot y \cdot x^{y-1} = 0$$

все верно.

8. $z = y + \ln \frac{x}{z}$

$$dz = dy + d\left(\ln \frac{x}{z}\right)$$

$$dz = dy + \frac{z}{x} \cdot \frac{1}{z} dx + \frac{z}{x} \cdot \left(-\frac{1}{z^2}\right) dz$$

$$dz\left(1 + \frac{1}{zx}\right) = dy + \frac{1}{x} dx$$

$$dz = \frac{zx}{1+zx} dy + \frac{z}{1+zx} dx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{1+zx} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{zx}{1+zx}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1;1;1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(1;1;1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

9. $y = \frac{10x}{1+x^2}$

$y' = \frac{10(1+x^2) - 2x \cdot 10x}{(1+x^2)^2}$

$y' = 0$: $10 + 10x^2 - 20x^2 = 0$

$x^2 = 1$

$x = -1 \notin [0;3]$.

$x = +1 \in [0;3]$

$y(0) = 0$

$y(1) = 5$

$y(3) = 3$

$\Rightarrow y_{max} = y(1) = 5$

$y_{min} = y(0) = 0$

10. $y = \ln(x^2-1)^2$

1. $D(f)$: $(x^2-1)^2 > 0 \Rightarrow x^2 - 1 \neq 0$

$x \neq \pm 1$

2. $f(-x) = \ln((-x)^2-1)^2 = \ln(x^2-1)^2 = f(x)$

функция четная, дальнейшие рассуждения проводим только для $x \geq 0$.

3. $x = 1$ – точка разрыва

$\lim\limits_{x \to 1-0} \ln(x^2-1)^2 = [\ \ln((1-0)^2-1)^2 = \ln((-0)\cdot(2-0))^2 =$

$= \ln(\quad)] =$

$\lim\limits_{x \to 1+0} \ln(x^2-1)^2 = [\ \ln((1+0)^2-1)^2 = \ln((+0)\cdot(2+0))^2 =$

$= \ln(\cdot\ )] =$ $\Rightarrow x = 1$ – точка разрыва II рода,

$x = 1$ – верт. асимптота

4. $x = 0 \Rightarrow y = 0$; $y = 0 \Rightarrow (x^2-1)^2 = 1 \Rightarrow$ $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$.

5. $y' = \frac{1}{(x^2-1)^2} \cdot 2\cancel{(x^2-1)} \cdot 2x = \frac{4x}{x^2-1}$

$y' = 0; \ x = 0$

x	0	$(0;1)$	$(1;+\infty)$
y'	0	$-$	$+$
y	0	$\searrow$	$\nearrow$

max

$$y'' = \frac{4(x^2-1) - 2x\cdot 4x}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x^2-4}{(x^2-1)^2} = \frac{-4(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$$

$y'' < 0 \ \forall x \in D(f) \Rightarrow$ функция выпукла вниз на всей области определения

Строим эскиз графика