З а д а ч а 1. Дана матрица C и вектор $\overline{d}$.

Используя метод элементарных преобразований Гаусса, определить:

1) ранг матрицы C;

2) общее решение однородной системы уравнений $C\overline{x} = \overline{0}$, где $\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, $\overline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overline{x}$ – вектор неизвестных, $\overline{0}$ – вектор правых частей однородной системы. Выписать решения в координатной и векторной формах;

3) совместна ли неоднородная система уравнений $C\overline{x} = \overline{d}$?

Если совместна, найти ее общее (или единственное) решение в координатной и векторной формах.

З а д а ч а 2. Даны матрицы A и вектор $\overline{b}$. Считая вектор $\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ вектором неизвестных, выписать систему уравнений $A\overline{x} = \overline{b}$:

1) вычислить определитель матрицы A, убедится, что матрица A не вырождена, $\det A \neq 0$;

2) найти матрицу A^{-1};

3) решить неоднородную систему $A\overline{x} = \overline{b}$, найти вектор-решение;

4) найти произведение матрицы A^{-1} на вектор $\overline{b}$.

№ варианта	Задача 1 $C\overline{x} = d$			Задача 2 $A\overline{x} = b$		
	C	$\overline{x}$	$\overline{d}$	A	$\overline{x}$	$\overline{b}$
19	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & [illegible] & -4 & 11 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 6 & -14 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
20	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & [illegible] & 18 \\ 3 & 5 & -4 & 6 \\ 7 & 10 & -1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
21	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
22	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 11 & 1 \\ -3 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -11 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
23	$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 4 \\ -4 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 0 & -14 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
24	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Задача № 1. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы A:

Варианты:

№ 1 $\begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$; № 2 $\begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; № 3 $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

№ 4 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; № 5 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; № 6 $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

№ 7 $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; № 8 $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; № 9 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

№ 10 $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & -1 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$; № 11 $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$; № 12 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

№ 13 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -4 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; № 14 $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; № 15 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & -5 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

№ 16 $\begin{pmatrix} 8 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; № 17 $\begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$; № 18 $\begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

№ 19 $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; № 20 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; № 21 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

№ 22 $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; № 23 $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; № 24 $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

№ 25 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; № 26 $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & -1 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$; № 27 $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$;

№ 28 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; № 29 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -4 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; № 30 $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

Задача № 2. Привести кривую второго порядка к каноническому виду ортогональным преобразованием.

Варианты:

№ 1. $4xy - x^2 - y^2 + 3 = 0$.
№ 2. $2x^2 + 2y^2 - 2xy - 9 = 0$.
№ 3. $xy = 4$.
№ 4. $2xy - 2x^2 - 2y^2 + 9 = 0$.
№ 5. $4xy - 3x^2 - 3y^2 + 25 = 0$.
№ 6. $15 - x^2 - y^2 - 4xy = 0$.
№ 7. $6xy - 5x^2 - 5y^2 + 16 = 0$.
№ 8. $xy - 8 = 0$.
№ 9. $3x^2 + 3y^2 - 4xy - 10 = 0$.
№ 10. $x^2 + y^2 - 8xy - 15 = 0$.
№ 11. $5x^2 + 5y^2 - 2xy - 24 = 0$.
№ 12. $4xy + 1 = 0$.
№ 13. $2x^2 + 2y^2 - 2xy - 1 = 0$.
№ 14. $3x^2 + y^2 - 4xy = 0$.
№ 15. $x^2 + y^2 + xy - 9 = 0$.

№ 16. $xy - 8 = 0.$

№ 17. $4xy - x^2 - y^2 + 3 = 0.$

№ 18. $3x^2 + 3y^2 - 4xy - 10 = 0.$

№ 19. $2x^2 + 2y^2 - 2xy - 9 = 0.$

№ 20. $x^2 + y^2 - 8xy - 15 = 0.$

№ 21. $xy - 4 = 0.$

№ 22. $5x^2 + 5y^2 - 2xy - 24 = 0.$

№ 23. $2xy - 2x^2 - 2y^2 + 9 = 0.$

№ 24. $4xy + 1 = 0.$

№ 25. $4xy - 3x^2 - 3y^2 + 25 = 0.$

№ 26. $x^2 + y^2 = 0.$

№ 27. $15 - x^2 - y^2 - 4xy = 0.$

№ 28. $3x^2 + y^2 - 4xy = 0.$

№ 29. $6xy - 5x^2 - 5y^2 + 16 = 0.$

№ 30. $x^2 + y^2 + xy - 9 = 0.$

Задача № 3. При каких значениях параметра λ квадратичная форма $Q(x)$ положительно определена (указать ближайшее целое λ).

Варианты:

№ 1. $5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_1x_3.$

№ 2. $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3.$

№ 3. $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3.$

№ 4. $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 10x_1x_3 + 2x_2x_3.$

№ 5. $2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3.$

№ 6. $x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2\lambda x_1x_3 + 2x_2x_3.$

№ 7. $6x_1^2 + 5x_2^2 + \lambda x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3.$

№ 8. $6x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$

№ 9. $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3.$

№ 10. $x_1^2 + \lambda x_2^2 - x_3^2 + 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3.$

№ 11. $x_1^2 + 9x_2^2 + 3x_3^2 - 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3.$

№ 12. $x_1^2 + 2x_2^2 + \lambda x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3.$

№ 13. $x_1^2 + 3x_2^2 + \lambda x_3^2 - 2x_1x_2 + 2\lambda x_2x_3.$

№ 14. $\lambda x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 2\lambda x_1x_2 - 2x_2x_3.$

№ 15. $\lambda x_1^2 + 6x_2^2 + x_3^2 - 2\lambda x_1x_2 + 2x_2x_3.$

№ 16. $5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$

№ 17. $6x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$

№ 18. $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3.$

№ 19. $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3.$

№ 20. $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3.$

№ 21. $x_1^2 + \lambda_2^2 - x_3^2 + 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3.$

№ 22. $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 10x_1x_3 + 2x_2x_3.$

№ 23. $x_1^2 + 9x_2^2 + 3x_3^2 - 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3.$

№ 24. $2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3.$

№ 25. $x_1^2 + 2x_2^2 + \lambda x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3.$

№ 26. $x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2\lambda x_1x_3 + 2x_2x_3.$

№ 27. $x_1^2 + 3x_2^2 + \lambda x_3^2 - 2x_1x_2 + 2\lambda x_2x_3.$

№ 28. $6x_1^2 + 5x_2^2 + \lambda x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3.$

№ 29. $\lambda x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 2\lambda x_1x_2 - 2x_2x_3.$

№ 30. $\lambda x_1^2 + 6x_2^2 + x_3^2 - 2\lambda x_1x_2 + 2x_2x_3.$

Задача № 4. Определить координаты образа $A(x)$, если задан вектор x и матрица A линейного преобразования $A : R^3 \to R^3$.

Варианты:

№ 1, № 16 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; № 2, № 17 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

$x = (1,\ -2,\ -1)$. $x = (3,\ -1,\ 1)$.

№ 3, № 18 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; № 4, № 19 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

$x = (1,\ 2,\ -1)$. $x = (1,\ 3,\ 0)$.

№ 5, № 20 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; № 6, № 21; $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

$x = (1, 2, 1)$. $x = (1,\ 0,\ 2)$.

№ 7, № 22 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; № 8, № 23 $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

$x = (1,\ 2,\ 1)$. $x = (2,\ -1,\ 0)$.

№ 9, № 24 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; № 10, № 25 $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

$x = (3,\ 1,\ 0)$. $x = (1,\ -1,\ 2)$.

№ 11, № 26 $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; № 12, № 27 $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$;

$x = (2,\ -1,\ 4)$. $x = (1,\ -1,\ 2)$.

№ 13, № 28 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; № 14, № 29 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

$x = (0,\ 1,\ 2)$. $x = (1,\ 1,\ 1)$.

№ 15, № 30 $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$x = (2,\ 2,\ 2)$.

Задача № 5. В пространстве V многочленов $P(t)$ степени $n \le 2$ со стандартным базисом $e_1 = 1$, $e_2 = t$, $e_3 = t^2$ задана система векторов f_1, f_2, f_3 и оператор $A : V \to V$;

1) проверить, что f_1, f_2, f_3 является тоже базисом;
2) проверить линейность оператора A;
3) найти матрицу перехода C от базиса $\{e\}$ к базису $\{f\}$;
4) найти матрицы A_e, A_f оператора A в обоих базисах;
5) проверить формулу $A_f = C^{-1} A_e C$.

Варианты:

№ 1, 16.	$f_1 = 1 + t$;	$f_2 = t + t^2$;	$f_3 = 1 + t^2$;	$A(p) = t \cdot p'$.
№ 2, 17.	$f_1 = 1 + t$;	$f_2 = t + t^2$;	$f_3 = 1 + t^2$;	$A(p) = p + p'$.
№ 3, 18.	$f_1 = 1 + t$;	$f_2 = t + t^2$;	$f_3 = 1 + t^2$;	$A(p) = 2p - p'$.
№ 4, 19.	$f_1 = 1$;	$f_2 = 1 + t$;	$f_3 = 1 + t + t^2$;	$A(p) = t \cdot p'$.
№ 5, 20.	$f_1 = 1$;	$f_2 = 1 + t$;	$f_3 = 1 + t + t^2$;	$A(p) = p + p'$.
№ 6, 21.	$f_1 = 1$;	$f_2 = 1 + t$;	$f_3 = 1 + t + t^2$;	$A(p) = 2p - p'$.
№ 7, 22.	$f_1 = 1 - t$;	$f_2 = t - t^2$;	$f_3 = t^2$;	$A(p) = t \cdot p'$.
№ 8, 23.	$f_1 = 1 - t$;	$f_2 = t - t^2$;	$f_3 = t^2$;	$A(p) = p + p'$.