Составители: доц. **Мушруб В.А.,**
доц. **Чубарова Е.И.**

Организационно-методические рекомендации

1. Чтение учебной литературы. Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного понимания предыдущего, проделав на бумаге все вычисления (в том числе и те, которые ввиду их простоты в учебнике опущены), воспроизведя имеющиеся в учебнике чертежи.

При изучении материала по учебнику полезно вести конспект, в который рекомендуется выписывать определения, формулировки теорем, формулы, уравнения и т. п. На полях конспекта следует отмечать вопросы для письменной или устной консультации с преподавателем.

Опыт показывает, что многим студентам помогает составление таблицы, содержащей наиболее часто употребляемые формулы.

Для облегчения ориентации в учебной литературе ниже приведено содержание курса, дополненное ссылками на главы учебных пособий. Рекомендуем взять в библиотеке, как минимум, следующий набор учебных пособий: конспект лекций [4] и один из задачников [5–7]. Старое издание (1993) сборника задач [7] не содержит упражнений по темам 3 и 5, а задачник [6] — кратких теоретических справок. Поэтому лучше использовать два задачника: [5] и [6] или [6] и [7]. Для более полного усвоения теоретического материала полезно прочесть указанные главы и параграфы один из учебников [1–3] или [8].

2. Решение задач. Чтение учебника должно сопровождаться решением задач, указанных ниже в упражнениях хотя бы по одному из задачников [5–7]. Решение задач определенного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

3. Самопроверка. После изучения определенной темы по учебнику и решения достаточного количества соответствующих задач студенту рекомендуется воспроизвести по памяти определения, формулы и формулировки теорем, проверяя себя каждый раз по учебнику и ответить на приведенные вопросы и задачи для самопроверки. В случае необходимости надо еще раз внимательно разобраться в материале учебника, решить несколько задач

Иногда недостаточность усвоения того или иного вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае надо вернуться назад и повторить плохо усвоенный раздел.

Важным критерием усвоения теории является умение решать задачи на пройденный материал. Другим критерием является понимание сущности теорем, правил и других теоретических положений. Можно сказать, что умение решать задачи является необходимым, но не достаточным условием хорошего знания теории.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ И ЗАЧЕТА КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ.

1. В процессе изучения высшей математики студент первого курса должен выполнить две контрольные работы, задачи первой из которых содержатся в разделе «Контрольная работа № 1». Не следует приступать к выполнению контрольного задания до решения достаточного количества задач по учебному материалу, соответствующему этому заданию. Опыт показывает, что чаще всего неумение решить ту или иную задачу контрольного задания вызывается тем, что студент не выполнил это требование.

2. Контрольные работы должны быть оформлены в соответствии с настоящими правилами. *Работы, выполненные без соблюдения этих правил, не засчитываются и возвращаются студенту для переработки.*

3. Каждую контрольную работу следует выполнять в отдельной тетради, чернилами любого цвета, кроме красного, оставляя поля для замечаний рецензента.

4. На обложке тетради должны быть разборчиво написаны фамилия, имя, и отчество студента, факультет (институт), номер группы, название дисциплины (высшая математика), номер контрольной работы, номер варианта и домашний адрес студента. В конце работы следует поставить дату ее выполнения и расписаться.

5. Номер варианта контрольной работы, которую выполняет студент, должен совпадать с последней цифрой номера его зачетной книжки.

6. Решения задач надо располагать в порядке возрастания номеров. Условия задач следует переписать в тетрадь.

7. При решении задач нужно обосновать каждый этап решения исходя из теоретических положений курса.

Решение задач и примеров следует излагать подробно, объясняя все выполненные действия и используемые формулы. Решение каждой задачи должно доводиться до окончательного ответа, которого требует условие. В промежуточные вычисления не следует вводить приближенные значения корней, числа π, e и т. д.

Полученный ответ следует проверить способами, вытекающими из существа данной задачи. Так, например, вычислив неопределенный интеграл, нужно проверить, равна ли подынтегральная функция производной от полученной первообразной. Полезно также, если это возможно, решить задачу несколькими способами и сравнить полученные результаты.

8. Срок проверки контрольных работ — 10 рабочих дней. *Студенты обязаны сдавать письменные контрольные работы не позднее, чем за 10 дней до начала экзаменационной сессии. В противном случае они не будут допущены к зачетам и экзаменам.*

9. После получения прорецензированной работы студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочеты, внести в решения задач рекомендуемые рецензентом изменения или дополнения и *прислать работу для повторной проверки.* В связи с этим рекомендуем при выполнении контрольной работы оставить в конце тетради несколько чистых листов для внесения исправлений и дополнений впоследствии.

В случае незачета работы и отсутствия прямого указания рецензента на то, что студент может ограничиться представлением исправленных решений отдельных задач, вся работа должна быть выполнена заново.

При представленных на повторную проверку исправлениях обязательно должны находиться прорецензированная работа и рецензия на нее. Вносить исправления в сам текст работы после ее рецензирования запрещается.

10. Прорецензированные контрольные работы вместе со всеми исправлениями и дополнениями, сделанными по требованию рецензента, следует сохранять.

На экзамен студент должен явиться с рецензией на выполненную контрольную работу. *Без предъявления* *преподавателю прорецензированных контрольных работ студент к экзамену не допускается.*

СОДЕРЖАНИЕ КУРСА. ПЕРВЫЙ СЕМЕСТР

РАЗДЕЛ I. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

ТЕМА 1. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ.

§1. Множество действительных чисел. Понятие функции. Способы задания функций. Элементарные функции. Простейшие неэлементарные функции.

Литература: [1, гл. 5], [2, гл. VI], [3, гл. V], [4, § 1.1 – 1.2, стр. 5–9] [5, гл. V, § 1], [7, гл. 1, гл. 4, §1].

Упражнения: [5, упр. 679, 700], [6, упр. **1.1.** 1), 2), 5) - 7), **1.2.** 1) - 3)], [7, гл. 4, упр. 73, 75, 83, 99, 139, 191].

§2. Числовая последовательность и ее предел. Предел функции. Основные теоремы о пределах. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Односторонние пределы. Два замечательных предела.

Литература: [1, гл. 6, § 4 – 10], [2, гл. VII, § 1 – 13], [3, гл. VI, § 24 – 28], [4, § 1.2 – 1.6, стр. 9–19], [5, гл. V, § 2 – 7, 10], [7,гл. 4 § 2].

Упражнения: [5, упр. 730, 734, 736, 742, 743, 763, 770, 779, 782 – 785], [6, упр. 1.20 – 1.25, 136 – 139, 146 – 149], [7, гл. 4, упр. 228, 234 – 241, 264 – 267, 289].

§3. Приращение функции. Возрастание и убывание функции. Непрерывность функции. Точки разрыва функции и их классификация. Свойства непрерывных функций.

Литература: [1, гл. 6, § 1 – 3], [2, гл. VIII], [3, гл. VI, § 29], [4, § 1.7, стр. 19–24], [5, гл. V, § 8], [7, гл. 4, § 2]

Упражнения: [5, упр. 814 – 816], [6, упр. 1.72, 1.81, 1.83, 1.86], [7, гл. 4, упр. 225 – 226].

ТЕМА 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§1. Определение производной. Дифференцируемость и непрерывность функций. Геометрический, физический и экономический смысл

производной. Свойства производной. Правила дифференцирования (включая производные сложной и обратной функции).

Литература: [1, гл. 7], [2, гл. IX, X], [3, гл. VII, § 30 – 37], [4, § 1.8, 1.10, 1.11, стр. 25–27, 30–40], [5, гл. VI, § 1, 2 ,4 – 6, 8–10; гл. VII, § 1], [7, гл. 5, § 1, 2].

Упражнения: [5, упр. 849, 850, 852–854, 874–877, 937–939, 980–985, 1090–1092], [6, упр. 2.1, 2.2, 2.7–2.17, 2.21–2.24, 2.76–2.79, 2.111, 2.112, 2.231, 2.232], [7, гл. 5, упр. 1, 11 – 13, 25–30, 33–36, 45–50, 136, 137].

§ 2. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши. Правило Лопиталя.

Литература: [1, гл. 9, § 1], [2, гл. XI, упр. 1, 2, 5] [3, гл. VIII, § 40, 41], [4, § 1.13, 1.14.1, стр. 41–45], [5, гл. VII, § 2, 3 [7, гл. 5, § 6].

Упражнения: [5, упр. 1101–1107, 1122–1134], [6, упр. 2.162 2.164, 2.166–2.168, 2.171, 2.173–2.183], [7, гл. 5, § 6, упр. 225 234, 241, 244, 246, 260].

§3. Дифференциал функции, его связь с производной Геометрический смысл дифференциала и его использование приближенных вычислениях. Производные и дифференциалы высши порядков.

Литература: [1, гл. 8], [2, гл. XII], [3, гл. VII, § 38] [4, § 1.9, 1.12, 1.14.4, стр. 27–30, 39–40, 55–56], [5, гл. VI, § 11 [7, гл. 5, § 3, 4].

Упражнения: [5, упр. 1064, 1070, 1071, 1021, 1022] [6, упр. 2.122–2.124, 2.134–2.137, 2.146, 2.147, 2.156], [7, гл. 5, упр. 146, 160, 161, 163–167, 174, 175, 179, 198, 199].

§4. Исследование функций с помощью дифференциальног исчисления. Условия возрастания и убывания функций. Экстрему функции. Необходимые и достаточные условия существовани экстремума.

Литература: [1, гл. 9, § 2 –5], [2, гл. XI, § 2, упр. 3 – 5, §7, упр. 6 – 14], [3, гл. VII, § 42 – 44], [4, § 1.14.2, стр. 46–55] [5, гл. VII, § 4, 5], [7, гл. 5, § 7].

Упражнения: [5, упр. 1158, 1160–1162, 1176], [6, упр. 2.203] [7, гл. 5, упр. 282].

§5. Выпуклость графика функции. Точки перегиба и их нахождение Асимптоты. Общая схема исследования функции.

Литература: [1, гл. 9, § 6 –8], [2, гл. XI, § 8, 10, упр. 15 – 27]

[3, гл. VII, § 45, 46], [5, гл. VII, § 6; гл. V, §9], [7, гл. 5, § 7].

Упражнения: [6, упр. 2.204–2.207, 2.224–2.226, 2.233 2.234], [7, гл. 5, упр. 297–300, 324–327].

§6. Формулы Тейлора и Маклорена. Примеры разложения элементарных функций по формуле Маклорена.

Литература: [4, § 1.4.14, стр. 56–57], [7, гл. 5, § 6].

Упражнения: [7, гл. 5 упр. 269–271].

Тема 3. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Понятие функции нескольких переменных. Предел и непрерывност функций нескольких переменных. Полное и частное приращени функций. Частные производные. Дифференцируемость и дифференциа функции. Геометрический смысл дифференцируемости функций дву переменных.

Производная по направлению. Градиент и его свойства. Экстрему функции нескольких переменных. Необходимое условие экстремума Достаточное условие для случая двух независимых переменных Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции нескольки переменных. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа. Мето наименьших квадратов.

Литература: [1, гл. 10], [2, гл. XX], [4, гл. 3, стр. 58–72], [5, гл. XI, § 1 – 3, 6, 11, 12], [7, гл. 11, 12].

Упражнения: [5, 1858-1861, 1884, 1885, 1927, 1931, 1947, 2018 2025, 2030–2033, 2036, 2037], [6, 3.1, 3.4, 3.4–3.7, 3.14–3.17, 3.23 3.26, 3.29–3.33, 3.36, 3.38–3.39, 3.40–3.46, 3.51–3.53] [7, гл. 12 упр. 1–4, 34, 46, 51, 59, 109–111].

Раздел II. Интегральное исчисление. Дифференциальные уравнения. Ряды

Тема 4. Интегралы

§1. Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица интегралов. Основные методы интегрирования: замена переменной, интегрирование по частям.

Литература: [1, гл. 11], [2, гл. XIII], [3, гл. IX], [4, § 2.1 2.5, стр. 73–82], [5, гл. VIII, § 1 – 8, 10], [7, гл. 6, § 1–3].

Упражнения: [5, 1263-1267, 1279–1284, 1291–1296, 1301, 1305 1307, 1309, 1330, 1340, 1362, 1363, 1375–1379, 1383, 1428, 1444] [6, 4.1–4.5, 4.19–4.22, 4.61–4.65, 4.68–4.72, 4.80, 4.96–4.99, 4.104 4.105], [7, гл. 6 упр. 1–5, 37–40, 56–59, 102–105, 107–110, 118, 119 126].

§2. Определенный интеграл как предел интегральных сумм. Свойства определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.

Литература: [1, гл. 12, §5], [2, гл. XIV, §12, упр. 10] [3, гл. X, §59], [4, § 2.6 – 2.9, стр. 82–88], [5, гл. IX, § 7] [7, гл. 6, § 4].

Упражнения: [5, 1593-1596, 1601], [6, 4.117, 4.118, 4.120–4.124 4.129, 4.130, 4.136], [7, гл. 6 упр. 254–257, 268–270].

§3. Геометрические приложения определенного интеграла: площад плоской фигуры, объем тела вращения. Приближенные метод вычисления определенного интеграла: формулы прямоугольников трапеций, Симпсона.

Литература: [1, гл. 12, §6, 8], [2, гл. XV], [3, гл. X, § 58] [4, § 2.10, 2.12, стр. 88–92, 95–97], [5, гл. IX, § 2–3], [7, гл. 6, § 5].

Упражнения: [5, упр. 1625, 1653, 1654, 1669, 1670], [6, 4.138 4.142 -- 4.146, 4.158], [7, гл. 6 упр. 290, 292–294, 219, 221, 388, 391]

§4. Несобственные интегралы. Понятие о кратных интегралах.

Литература: [1, гл. 12, §5], [2, гл. XIV, §12, упр. 10] [3, гл. X, §59], [4, § 2.11, 2.13, стр. 92–95, 97–99], [5, гл. IX, § 7] [7, гл. 6, § 6].

Упражнения: [5, упр. 1748, 1752], [6, упр. 4.171] [7, гл. 6 упр. 355–358].

Тема 5. Дифференциальные уравнения

§1. Понятие о дифференциальном уравнении. Примеры торгово-экономических задач, приводящие к дифференциальным уравнениям. Порядок дифференциального уравнения. Семейство решений. Теорема существования и единственности решения (без доказательства). Задача Коши. Геометрическое истолкование решения. Общее и частное решение дифференциального уравнения.

Уравнения с разделяющимися переменными. Линейное уравнение первого порядка. Возможные случаи понижения порядка дифференциального уравнения (на примере уравнений второго порядка), когда в его записи отсутствуют независимая переменная или искомая функция.

Литература: [1, гл. 13, § 5], [2, гл. XXI, §1 – 5, 9] [3, гл. XVI, §79], [4, § 2.14 – 2.17, стр. 99–108], [5, гл. XII, § 1 3, 7, 10], [7, гл. 14, § 1.1–1.3].

Упражнения: [5, упр. 2051, 2057, 2058, 2061, 2115, 2116], [6, упр 5. 14–5.18, 5.21], [7, гл. 6, упр. 1–4, 10–13, 20–23, 43–46].

§2. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Структура общего решения. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Подбор частных решений при специальном виде правой части.

Литература: [1, гл. 14], [2, гл. XXII, § 7, 11 – 13], [3, гл. XVI, §80], [4, § 2.18–2.21, стр. 108–118], [5, гл. XII, § 8, 9], [7, гл. § 2].

Упражнения: [5, упр. 2184 – 2187, 2213 – 2216, 2218] [6, упр. 5.22, 5.23, 5.25, 5.27, 5.29, 533, 5.37–5.39], [7, гл. 6, упр. 78--79, 84–87, 98–101, 104–106].

Тема 6. Ряды

§1. Числовые ряды. Сходимость ряда. Сумма ряда Свойства рядов. Необходимое условие сходимости ряда. Теорема сравнения. Признаки сходимости Даламбера, Коши. Знакочередующиеся ряды. Абсолютная и условная сходимость. Признак Лейбница.

Литература: [1, гл. 15], [2, гл. XXI, § 1 – 7], [3, гл. XI], [4, § 2.22 – 2.26, стр. 118–130], [5, гл. XIV, § 1], [7, гл. 8, § 1–3].

Упражнения: [5, упр. 2422–2424, 2432, 2433, 2435, 2437] [6, упр. 6.1, 6.15–6.18, 6.24, 6.39–6.42], [7, гл. 8, упр. 31--34, 43 48].

§2. Степенные ряды. Радиус, интервал и область сходимости. Разложение элементарных функций в ряд Маклорена или Тейлора.

Литература: [1, гл. 16, § 1 – 5], [2, гл. XXI, § 8 – 12, 14], [3, гл. XII, 65 – 68], [4, § 2.27 – 2.29, стр. 130–137], [5, гл. XIV, § 3 – 4], [7, гл. 8, § 4].

Упражнения: [5, упр. 2483 – 2486, 2492. 2), 3)], [6, упр. 6.77–6.80, 6.97, 6.111, 6.115, 6.98], [7, гл. 8, упр. 103--106, 119–122].

§3. Использование рядов для приближенных вычислений.

Литература: [1, гл. 16, § 6], [2, гл. XXI, § 13], [3, гл. XII, § 69], [4, § 2.29, стр. 137–139], [5, гл. XIV, § 5].

Упражнения: [5, упр. 2512, 2518, 2520], [6, упр. 6.125–6.127].

Вопросы для самопроверки

Тема 1. 1. Сформулируйте определение понятия функции. Что называется областью определения функции?

2. Какие функции называются элементарными?

3. Какой вид имеют графики функций $y=a^x$ при $a>1$, $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\arcsin x$, $y=\operatorname{arctg} x$? Укажите области определения и множества значений этих функций. Какие из этих функций являются чётными?

4. При каких условиях число b называется пределом функции $f(x)$ при стремлении x к числу 2, к бесконечности $-\infty, +\infty$? Прочитайте формулы $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$ и объясните их смысл.

5. Пределом какой функции при $x\to 0$ является число e? Найдите в учебнике значение числа e с двумя знаками после запятой. Как называется и обозначается логарифм числа x по основанию e? Какому числу равен предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$?

7. Какие правила применяются при вычислении пределов суммы, разности и отношения двух функций?

8. Как определяется непрерывность функции $f(x)$ в точке a?

Тема 2. 1. Сформулируйте определение производной. Каков геометрический смысл производной?

2. Функция имеет производную в данной точке. Следует ли отсюда, что она непрерывна в этой точке?

3. Сформулируйте теоремы Ролля и Лагранжа. Каков геометрический смысл этих теорем? Сформулируйте теорему Коши.

4. В чем заключается правило Лопиталя? При каких условиях применяется правило Лопиталя? Перечислите различные типы неопределённостей, для раскрытия которых может быть использовано это правило. Приведите примеры.

5. Что называется дифференциалом функции? Приведите примеры.

6. Каковы признаки возрастания и убывания функции?

7. Что такое экстремум функции? Каковы необходимые и достаточные условия экстремума? Приведите примеры.

8. Приведите пример, показывающий, что обращение производной в нуль не является достаточным условием экстремума.

9. Как найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика

функции? Приведите примеры.

ТЕМА 3. 1. Сформулируйте определение частных производных.

2. Что называется полным приращением и полным дифференциалом функции двух переменных? Приведите примеры.

3. Каковы достаточные условия минимума (максимума) функции двух переменных. Что такое условный экстремум?

ТЕМА 4. 1. Сформулируйте определение первообразной функции. Докажите, что любые две первообразные одной и той же функции отличаются на константу.

2. Что называется неопределённым интегралом?

3. Какие правила применяются для вычисления неопределённого интеграла суммы функций, для вычисления $\int k \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$?

4. Выведите формулу интегрирования по частям.

5. Что называется интегральной суммой функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$. Какая фигура называется криволинейной трапецией? По какой формуле вычисляется её площадь?

6. Напишите формулу Ньютона-Лейбница.

7. Какие свойства определённого интеграла Вам известны?

8. В чём состоят определение и геометрический смысл несобственного интеграла с бесконечным пределом интегрирования?

ТЕМА 5. 1. Что называется решением дифференциального уравнения? Что является неизвестной в дифференциальном уравнении? Что называется порядком дифференциального уравнения?

2. Как из общего решения дифференциального уравнения первого (второго) порядка можно получить его частное решение? Каков геометрический смысл начальных условий дифференциальных уравнений первого и второго порядка?

3. В чем заключается смысл теоремы о существовании и единственности решения для дифференциального уравнения первого порядка? Приведите пример дифференциального уравнения первого порядка, графики двух различных решений которого пересекаются в некоторой точке. Выполняются ли в этой точке условия теоремы существования и единственности?

4. При каких условиях дифференциальное уравнение первого порядка называется уравнением с разделяющимися переменными?

5. Как решаются линейные дифференциальные уравнения первого порядка?

6. В каких случаях линейное дифференциальное уравнение второго порядка называется однородным, неоднородным?

7. Напишите характеристический многочлен уравнения $y'' + b \cdot y' + c \cdot y = 0$. Пусть D – дискриминант характеристического многочлена. Какой вид имеет общее решение этого дифференциального уравнения при $D > 0$, при $D = 0$ и при $D < 0$?

8. Какова структура общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами?

ТЕМА 6. 1. Что называется суммой сходящегося степенного ряда?

2. Почему при исследовании сходимости ряда можно отбрасывать любое конечное число его членов?

3. Можно ли утверждать, что ряд сходится, если предел его общего члена равен нулю?

4. Сформулируйте признак Даламбера и интегральный признак Коши сходимости ряда. Сформулируйте теорему сравнения рядов.

5. Какие знакопеременные ряды называются абсолютно сходящимися и какие – условно сходящимися? Сформулируйте признак Лейбница.

6. Приведите примеры степенных рядов, имеющих нулевой, конечный и бесконечный радиус сходимости.

7. Выпишите разложения в ряд Маклорена функций: $e^x, \frac{1}{1-x}, \sin x, \ln(1+x)$. Каковы области сходимости получившихся рядов?

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА:

[1]. Карасев А. И., Аксютина З. М., Савельева Т. И. Курс высшей математики для экономических вузов. Ч. 1. М.: Высшая школа, 1982.

[2]. Кудрявцев В. А., Демидович Б. П. Краткий курс высшей математики. М.: Наука, 1989.

[3]. Маркович Э. С. Курс высшей математики с элементами теории вероятностей и математической статистики. М.: Высшая школа,1972.

[4]. Высшая и прикладная математика. Конспект лекций. Часть I. Высшая математика. Выпуск 1. Основы математического

анализа. М.: МКУ, 1993.

[5]. Минорский В. И. Сборник задач по высшей математике. М.: Наука, 1986.

[6]. Зайцев М.В., Лавриненко Т.А. Высшая математика. Сборник задач, часть 1. М.: изд. МГУК, 1998.

[7]. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике. М.: Высшая школа, 1998.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА.

[8]. Шипачев В. С. Высшая математика. М.: Высшая школа, 1998.

[9]. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч **I, II**. М.: Высшая школа, 1980.

[10]. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов. / Под ред. Б. П. Демидовича. М.: Наука, 1979.

[11]. Запорожец Г. И. Руководство к решению задач по математическому анализу. М.: Высшая школа, 1966.

[12]. Ильин В. А., Поздняк Э. Г. Основы математического анализа. Т. **1, 2**. М.: Наука, 1972.

[13]. Высшая математика для экономистов (под ред. проф. Н.М. Кремера). М.: Банки и биржи, издательское объединение ЮНИТИ, 1998.

[14]. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Физматгиз, 1962.

Методические указания к решению первой контрольной работы

В этом параграфе приведён разбор решений задач типового варианта контрольной работы по математическому анализу.

Задача 1. Вычислить пределы функций а) — е):

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^3+x^2}{x^2-2x+1}-\dfrac{4x^2+1}{2x-2}\right)$.

Анализ задачи. Так как для данных дробей степень числителя больше степени знаменателя, то $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+x^2}{x^2-2x+1}=\infty$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2+1}{2x-2}=\infty$. Поэтому мы имеем дело с неопределённостью $\infty-\infty$. Следовательно, теоремой о пределе разности воспользоваться нельзя и необходимо провести тождественные преобразования выражения, находящегося под знаком предела.

Решение. Приводим выражение к общему знаменателю:

$$\frac{2x^3+x^2}{x^2-2x+1}-\frac{4x^2+1}{2x-2}=\frac{2x^3+x^2}{(x-1)^2}-\frac{4x^2+1}{2(x-1)}=$$

$$=\frac{2\left(2x^3+x^2\right)-\left(4x^2+1\right)(x-1)}{2(x-1)^2}=$$

$$=\frac{4x^3+2x^2-\left(4x^3-4x^2+x-1\right)}{2(x-1)^2}=$$

$$=\frac{4x^3+2x^2-4x^3+4x^2-x+1}{2x^2-4x+2}=\frac{6x^2-x+1}{2(x-1)^2}=$$

= / *значение дроби не изменится, если её числитель и знаменатель разделить на одно и то же ненулевое число* / =

$$=\frac{\left(6x^2-x+1\right)/x^2}{\left(2x^2-4x+2\right)/x^2}=\frac{\dfrac{6x^2}{x^2}-\dfrac{x}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{2x^2}{x^2}-\dfrac{4x}{x^2}+\dfrac{2}{x^2}}=\frac{6-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{2-\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^2}}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^3+x^2}{x^2-2x+1}-\dfrac{4x^2+1}{2x-2}\right)=$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{6 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}}{2 - \dfrac{4}{x} + \dfrac{2}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(6 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2 - \dfrac{4}{x} + \dfrac{2}{x^2}\right)} =$$

$$= \frac{6 - \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x} + \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}}{2 - \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{x} + \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x^2}} = \frac{6-0+0}{2-0+0} = 3.\ \boxed{\textit{Ответ}: 3.}$$

б) $\lim\limits_{x\to\infty} \log_3\left(\dfrac{x^2+x+1}{3x^2-1}\right)$.

Решение. Вычислим сначала предел логарифмируемого числа:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{3x^2-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+x+1)/x^2}{(3x^2-1)/x^2} =$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}{3-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \tfrac{1+0+0}{3-0} = \tfrac{1}{3}.$$

Из непрерывности функции $y(x) = \log_3 x$ следует, что

$$\lim_{x\to\infty}\log_3(f(x)) = \log_3\left(\lim_{x\to\infty} f(x)\right),$$

если предел $\lim_{x\to\infty} f(x)$ существует [1]. Поэтому

$$\lim_{x\to\infty}\log_3\left(\frac{x^2+x+1}{3x^2-1}\right) = \log_3\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{3x^2-1}\right) =$$

$$= \log_3\left(\frac{1}{3}\right) = -1.\ \boxed{\textit{Ответ}: -1.}$$

Теорема (Первое правило Лопиталя). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют производные в некоторой окрестности точки a. Если пределы функций равны нулю

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = 0 \text{ и } \lim_{x\to a} g(x) = 0}$$

[1]слова «предел существует» означают, что предел равен конечному действительному числу

и если существует предел отношения производных $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то предел отношения функций равен пределу отношения производных

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.}$$

Теорема (Второе правило Лопиталя). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют производные в некоторой окрестности точки a. Если пределы функций равны бесконечности

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = \infty \text{ и } \lim_{x\to a} g(x) = \infty}$$

и если существует предел отношения производных $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то предел отношения функций равен пределу отношения производных

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.}$$

в) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{3x^2+8x-3}{x^2+5x+6}$.

Анализ задачи. В данном случае, непосредственное применение теоремы о пределе частного невозможно, поскольку, как показывает подстановка числа -3 вместо x, и предел числителя и предел знаменателя равны нулю.

$\lim_{x\to-3}(3x^2+8x-3) = 3(-3)^2 + 8(-3) - 3 = 0$ и
$\lim_{x\to-3}(x^2+5x+6) = (-3)^2 + 5(-3) + 6 = 0.$

Таким образом, рассматриваемый предел представляет собой неопределённость вида $\frac{0}{0}$ и для решения задачи требуется провести тождественные преобразования выражения, находящегося под знаком предела.

Решение. Разложим числитель и знаменатель на множители, пользуясь следующей теоремой: если x_1, x_2 — корни квадратного трехчлена ax^2+bx+c, то $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$. Решаем квадратное уравнение, находя его дискриминант D.

$$3x^2+8x-3=0;\quad D = b^2-4ac = 8^2+4\cdot3\cdot3 = 100;$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-8 \pm 10}{6};\ x_1 = \frac{1}{3};\ x_2 = -3.$$

Отсюда,

$$3x^2 + 8x - 3 = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - (-3)) = (3x - 1)(x + 3).$$

Аналогично, $x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2;\ x_2 = -3;$
Поэтому $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$.

Преобразуем выражение находящееся под знаком предела:

$$\lim_{x\to-3} \frac{3x^2 + 8x - 3}{x^2 + 5x + 6} = \lim_{x\to-3} \frac{(x + 3)(3x - 1)}{(x + 2)(x + 3)} =$$

$$= \lim_{x\to-3} \frac{3x - 1}{x + 2} = \left/ \begin{array}{l} \textit{так как функция } y = \frac{3x-1}{x+2} \textit{ непрерывна в} \\ \textit{точке } x = -3, \textit{ подставляем } x = -3 \end{array} \right/ =$$

$$= \frac{3 \cdot (-3) - 1}{-3 + 2} = \frac{-10}{-1} = 10.$$

Другое решение задачи. Поскольку пределы числителя и знаменателя при $x \to -3$ равны нулю, применимо правило Лопиталя. $\lim\limits_{x\to-3} \frac{3x^2 + 8x - 3}{x^2 + 5x + 6} = \lim\limits_{x\to-3} \frac{(3x^2 + 8x - 3)'}{(x^2 + 5x + 6)'} = \lim\limits_{x\to-3} \frac{6x + 8}{2x + 5} = \frac{6 \cdot (-3) + 8}{2 \cdot (-3) + 5} = 10.$ $\boxed{\textit{Ответ}: 10.}$

г) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{\sqrt{4x + 1} - 3}{\sqrt{x + 2} - 2}$.

Анализ задачи. Подстановка числа 2 вместо x показывает, что пределы числителя и знаменателя равны нулю. Следовательно, нам потребуется раскрыть неопределённость $\frac{0}{0}$. Для этого можно либо провести тождественные преобразования выражения $\dfrac{\sqrt{4x + 1} - 3}{\sqrt{x + 2} - 2}$, либо применить правило Лопиталя.

Решение. Выражение $\sqrt{4x + 1} + 3$ является сопряженным по отношению к выражению $\sqrt{4x + 1} - 3$, а выражение $\sqrt{x + 2} + 2$ — по отношению к $\sqrt{x + 2} - 2$. Умножая числитель и знаменатель дроби на произведение сопряжённых выражений $(\sqrt{4x + 1} + 3) \cdot (\sqrt{x + 2} + 2)$, и используя формулу разности квадратов $\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)}$, получаем $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{\sqrt{4x + 1} - 3}{\sqrt{x + 2} - 2} =$

$$= \lim_{x\to2} \frac{(\sqrt{4x + 1} - 3) \cdot (\sqrt{4x + 1} + 3) \cdot (\sqrt{x + 2} + 2)}{(\sqrt{x + 2} - 2) \cdot (\sqrt{x + 2} + 2)(\sqrt{4x + 1} + 3)} =$$

$$= \lim_{x\to2} \frac{(4x + 1 - 9) \cdot (\sqrt{x + 2} + 2)}{(x + 2 - 4) \cdot (\sqrt{4x + 1} + 3)} =$$

$$= \lim_{x\to2} \frac{(4x - 8) \cdot (\sqrt{x + 2} + 2)}{(x - 2) \cdot (\sqrt{4x + 1} + 3)} =$$

$$= \lim_{x\to2} \frac{4(x - 2) \cdot (\sqrt{x + 2} + 2)}{(x - 2) \cdot (\sqrt{4x + 1} + 3)} =$$

$$= \lim_{x\to2} \frac{4 \cdot (\sqrt{x + 2} + 2)}{(\sqrt{4x + 1} + 3)} = \frac{4 \cdot (\sqrt{2 + 2} + 2)}{\sqrt{4 \cdot 2 + 1} + 3} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}.$$

Другое решение задачи. Воспользуемся правилом Лопиталя

$$\lim_{x\to2} \frac{\sqrt{4x + 1} - 3}{\sqrt{x + 2} - 2} = \lim_{x\to2} \frac{(\sqrt{4x + 1} - 3)'}{(\sqrt{x + 2} - 2)'} = \lim_{x\to2} \frac{\frac{2}{\sqrt{4x+1}}}{\frac{1}{2\sqrt{x+2}}} =$$

$$= \left/ \begin{array}{l} \textit{так как функция непре-} \\ \textit{рывна в точке } x = 2, \textit{ под-} \\ \textit{ставляем } x = 2 \end{array} \right/ = \frac{\frac{2}{\sqrt{4 \cdot 2+1}}}{\frac{1}{2\sqrt{2+2}}} = \frac{8}{3}. \ \boxed{\textit{Ответ}: \frac{8}{3}.}$$

д) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1 - \cos x^2}{3x^4}$.

Анализ задачи. Подстановка числа 0 вместо x показывает, что предел числителя и предел знаменателя при $x \to 0$ равны нулю. Поэтому имеет место неопределённость $\frac{0}{0}$. Для того, чтобы раскрыть неопределённость можно либо провести тождественные преобразования выражения $\dfrac{1 - \cos x^2}{3x^4}$, либо применить правило Лопиталя.

Решение. Совершим замену неизвестной $y = \dfrac{x^2}{2}$; при этом $x^2 = 2y$. Так как $y = 0$ при $x = 0$, то $y \to 0$.

$$\lim_{x\to0} \frac{1 - \cos x^2}{3x^4} = \lim_{x\to0} \frac{1 - \cos 2y}{3 \cdot (2y)^2}.$$

Используем теперь тригонометрическую формулу

$$\mathbf{1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha.}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2y}{3\cdot(2y)^2} = \lim_{y\to 0}\frac{2\sin^2 y}{12y^2} = \frac{2}{12}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} =$$

$$= \Big/\text{применяем первый замечательный предел } \lim_{x\to 0}\tfrac{\sin x}{x}=1\Big/ = \tfrac{1}{6}\cdot 1\cdot 1 = \tfrac{1}{6}.$$

Другое решение задачи. Воспользуемся вновь правилом Лопиталя

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\cos x^2\right)'}{3\left(x^4\right)'} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot\sin x^2}{12x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{6x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sin x^2\right)'}{\left(6x^2\right)'} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\cos x^2}{12x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x^2}{6} =$$

$$= \Big/\text{подставляем } x=0,\ \cos 0 = 1\Big/ = \frac{1}{6}.\ \boxed{\text{Ответ: } \frac{1}{6}.}$$

е) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{\frac{2}{3}x}.$

Решение. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{\frac{2x}{3}} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2+3}{x-2}\right)^{\frac{2x}{3}} =$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x-2}+\frac{3}{x-2}\right)^{\frac{2x}{3}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^{\frac{2x}{3}} =$$

$$= \Big/\text{замена переменной } y = \tfrac{3}{x-2};\ x = \tfrac{3}{y}+2;\ \text{так как } \lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty}\tfrac{3}{x-2} = 0,\ \text{то } y\to 0\Big/ =$$

$$= \lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{2\left(\frac{3}{y}+2\right)}{3}} = \lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{2}{y}+\frac{4}{3}} =$$

$$= \lim_{y\to 0}\left((1+y)^{\frac{1}{y}}\right)^2\cdot(1+y)^{4/3} = \Big/\text{предел произведения равен произведению пределов}\Big/ =$$

$$= \left(\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right)^2\cdot\lim_{y\to 0}(1+y)^{4/3} =$$

$$= \Big/\text{используем второй замечательный предел } \lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e.\Big/ = e^2\cdot 1 = e^2.$$

Предел $\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{4}{3}}$ вычислен подстановкой $y=0$. Предел $\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}$ не может быть вычислен подстановкой $y=0$, поскольку в результате подстановки получается *неопределённость* 1^∞. $\boxed{\text{Ответ: } e^2.}$

ЗАДАЧА 2. Вычислить производные функций а) — г):

а). Вычислить производную функции $\boldsymbol{y(x) = \ln\dfrac{x-2}{x+2}}$.

Решение. Найдём сначала производную функции $u(x) = \frac{x-2}{x+2}$:

$$u'(x) = \frac{(x-2)'(x+2)-(x+2)'(x-2)}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{1\cdot(x+2)-1\cdot(x-2)}{(x+2)^2} = \frac{4}{(x+2)^2}.$$ Теперь находим в таблице производных сложных функций формулу $\boldsymbol{(\ln u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}}$ и, подставляя $u(x) = \dfrac{x-2}{x+2}$, $u'(x) = \dfrac{4}{(x+2)^2}$, получаем

$$y'(x) = \frac{\dfrac{4}{(x+2)^2}}{\dfrac{x-2}{x+2}} = \frac{4}{(x-2)(x+2)}.\ \boxed{\text{Ответ: } \frac{4}{x^2-4}.}$$

б). Вычислить производную функции $\boldsymbol{y = \dfrac{x}{4\cdot\sqrt{x^2+4}}}$.

Решение. Найдём сначала производную функции

$$f(x) = \sqrt{x^2+4}.$$

Так как $f(x) = \sqrt{u(x)}$, где $u(x) = x^2 + 4$, то по таблице производных сложных функций [таблица 2 пункт 2.] находим:

$$\left(\sqrt{u(x)}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{2x}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}.$$

Теперь вычисляем производную функции $y(x)$, пользуясь формулой производной отношения:

$$y' = \frac{x' \cdot 4 \cdot \sqrt{x^2+4} - \left(4 \cdot \sqrt{x^2+4}\right)' \cdot x}{16 \cdot (x^2+4)} = \frac{4 \cdot \sqrt{x^2+4} - \frac{4x}{\sqrt{x^2+4}} \cdot x}{16 \cdot (x^2+4)} =$$

$$= \frac{4 \cdot \left(\sqrt{x^2+4} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}\right)}{16 \cdot (x^2+4)} = \frac{4\left(\left(\sqrt{x^2+4}\right)^2 - x^2\right) : \sqrt{x^2+4}}{16 \cdot (x^2+4)} =$$

$$= \frac{4\left(x^2+4-x^2\right)}{16 \cdot \sqrt{(x^2+4)^3}} = \frac{16}{16 \cdot \sqrt{(x^2+4)^3}}. \quad \boxed{\textit{Ответ: } \frac{1}{\sqrt{(x^2+4)^3}}.}$$

в). Вычислить производную $y(x) = x^3 \cdot 2^x \cdot \arcsin x$.

Анализ задачи. Функция $y(x)$ представляет собой произведение трёх функций $u(x) = x^3, v(x) = 2^x$ и $w(x) = \arcsin x$. Используя правило Лейбница, можно вывести общую формулу:

$$(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot (vw) + u \cdot (vw)' = u'vw + u \cdot (v' \cdot w + v \cdot w').$$

Следовательно,

$$\boxed{(uvw)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'.}$$

Решение.
$y'(x) = \left(x^3\right)' \cdot 2^x \cdot \arcsin x + x^3 \cdot (2^x)' \cdot \arcsin x + x^3 \cdot 2^x \cdot \arcsin' x.$

$$\boxed{\textit{Ответ: } 3x^2 \cdot 2^x \cdot \arcsin x + x^3 \cdot 2^x \cdot \ln 2 \cdot \arcsin x + x^3 \cdot \frac{2^x}{\sqrt{1-x^2}}.}$$

г). Вычислить производную функции $y = x^{\sin x}$.

Решение. Пользуясь основным логарифмическим тождеством $y = e^{\ln y}$, представим $y(x)$ в виде

$y(x) = \left(e^{\ln x}\right)^{\sin x}$. Так как $\left(a^b\right)^c = a^{bc}$, то $y(x) = e^{\sin x \cdot \ln x}$ и поэтому $y' = (\sin x \cdot \ln x)' \cdot e^{\sin x \cdot \ln x} = \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right) e^{\sin x \cdot \ln x} = \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right) x^{\sin x}$. В последнем равенстве мы вновь воспользовались формулой $x^{\sin x} = e^{\sin x \cdot \ln x}$, читая её слева на право. $\boxed{\textit{Ответ: } \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right) x^{\sin x}.}$

ЗАДАЧА 3. Исследовать функции и построить их графики:
а). Исследовать функцию $y(x) = \frac{1}{10} \cdot \left(2x^3 + 15x^2 + 24x\right)$.

Решение. 1). Так как $\frac{1}{10} \cdot \left(2x^3 + 15x^2 + 24x\right)$ — многочлен, то функция $y(x)$ определена и непрерывна на всей числовой прямой. Таким образом, область определения данной функции вся — числовая прямая: $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

2). Функция не является ни чётной ни нечётной, поскольку
$y(1) = \frac{41}{10}$; $y(-1) = -\frac{11}{10}$; $y(-1) \neq y(1)$; $y(-1) \neq -y(1)$.

3). Заметим, что при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ поведение многочлена $y(x)$ определяется поведением его старшего члена $\frac{2}{10}x^3$, который неограниченно возрастает при $x \to +\infty$ и неограниченно убывает при $x \to -\infty$. Поэтому
$\lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} y(x) = -\infty$.
Так как функция $y(x)$ определена на всей числовой оси и
$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \pm\infty$, график функции не имеет асимптот.

4). $y(0) = 0 \Rightarrow O(0;0)$ — точка пересечения графика с осью Oy.

Для определения точек пересечения графика с осью Ox решим уравнение[2] $y(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{10} \cdot \left(2x^3 + 15x^2 + 24x\right) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x \cdot \left(2x^2 + 15x + 24\right) = 0;$$

$$\Updownarrow$$

$$x = 0 \text{ или } 2x^2 + 15x + 24 = 0, \quad \begin{array}{l} D = b^2 - 4ac = \\ 15^2 - 4 \cdot 2 \cdot 24 = 33; \end{array}$$

[2] В вариантах 5 — 7 контрольной работы корни уравнения $y(x) = 0$ находятся подбором. Если Вам достался один из этих вариантов, попробуйте подставить числа $x = -4$, $x = -1$, $x = 2$ и $x = \frac{7}{2}$.

$$\Updownarrow$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-15 \pm \sqrt{33}}{4}, \ x_3 = 0.$$

5). Находим локальные экстремумы, а также промежутки возрастания и убывания функции. Для этого вычисляем производную функции $y(x)$: $y'(x) = \frac{1}{10}\left(6x^2 + 30x + 24\right)$,

$$y'(x) = \frac{3x^2 + 15x + 12}{5},$$ и решаем уравнение $y'(x) = 0$:

$3x^2 + 15x + 12 = 0$, критические точки $x_1 = -1, x_2 = -4$.

Так как производная не имеет точек разрыва, других критических точек нет. Определяем знак производной справа и слева от каждой критической точки и составляем таблицу:

$$y'(-5) = \frac{12}{5}; \quad y'(-2) = -\frac{6}{5}; \quad y'(0) = \frac{12}{5};$$

x	$(-\infty; -4)$	-4	$(-4; -1)$	-1	$(-1; +\infty)$
y'	+	0	−	0	+
y	↗	максимум	↘	минимум	↗

Итак, функция возрастает при $x \in [-\infty; -4]$ и при $x \in [-1; +\infty]$ и убывает при $x \in [-4; -1]$; локальный минимум — $y(-1) = -\frac{11}{10}$, локальный максимум — $y(-4) = \frac{8}{5}$.

6). Используя пункт 3), получаем, что множество значений функции $\mathrm{E}(y)$ — вся числовая прямая, $\mathrm{E}(y) = (-\infty; +\infty)$.

7). Находим точки перегиба функции и устанавливаем промежутки, на которых график функции обращён выпуклостью вверх и вниз. Для этого, прежде всего, вычисляем производную второго порядка и приравниваем её к нулю:

$$y''(x) = \left(y'(x)\right)' = \left(\frac{3x^2 + 15x + 12}{5}\right)' = \frac{1}{5}\left(6x + 15\right).$$

$$y''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x + 15 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{15}{6} = -\frac{5}{2}.$$

Для определения знаков второй производной подставляем в неё числа из промежутков $x < -\frac{5}{2}$ и $x > -\frac{5}{2}$:

$$y''(-5) = -3; \quad y''(0) = 3.$$

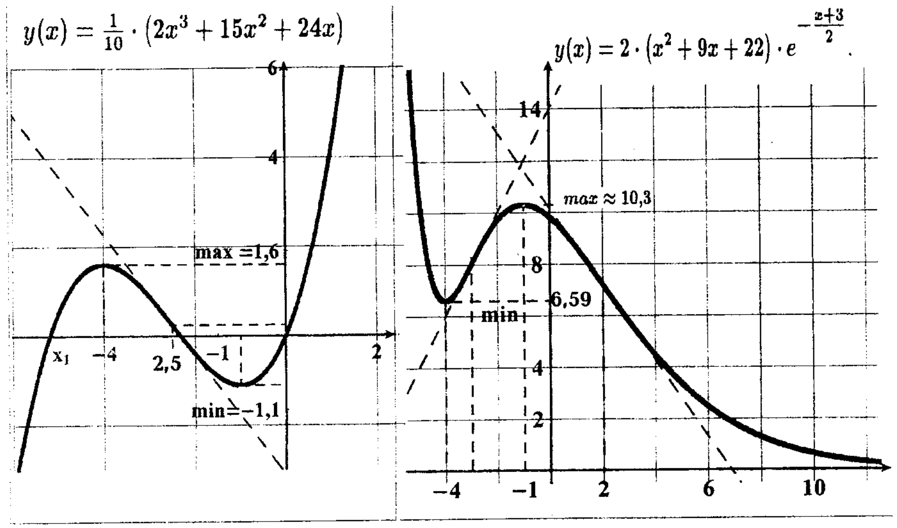


Рис. 1. Графики функций 3.а) и 3.б)

x	$(-\infty; -\frac{5}{2})$	$-\frac{5}{2}$	$(-\frac{5}{2}; +\infty)$
y''	−	0	+
y	выпуклость вверх	перегиб	выпуклость вниз

Теперь необходимо найти значение функции в точке перегиба и определить угол наклона касательной к графику функции в этой точке: $y\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{4}$, тангенс угла наклона [3] равен значению производной в данной точке $y'\left(-\frac{5}{2}\right) = \operatorname{tg}\alpha = -\frac{27}{20}$. При построении касательной откладываем 2,0 *см* от точки $A(-2{,}5; 0{,}25)$ по оси Ox вправо и 2,7 *см* вдоль оси Oy вниз и получаем точку $B(-2{,}5 + 2; 0{,}25 - 2{,}7)$, $B(-0{,}5; -2{,}45)$. Проводим через точки A и B прямую (AB). График функции $y(x)$ должен касаться прямой (AB) в точке A.

8). На этом исследование функции закончено и остаётся лишь вычислить её значения в некотором числе точек, достаточном для построения графика, и построить график.

б). Исследовать функцию $y(x) = 2 \cdot (x^2 + 9x + 22) \cdot e^{-\frac{x+3}{2}}$.

[3] угол наклона α равен $\alpha = \operatorname{arctg}(-\frac{27}{20}) = -\operatorname{arctg}\frac{27}{20} \approx -53°$.

Решение. 1). Так как $\mathrm{D}\left(x^2+9x+22\right)=\mathbb{R}$ и $\mathrm{D}\left(e^{-\frac{x+3}{2}}\right)=\mathbb{R}$, то функция $y(x)$ определена и непрерывна на всей числовой прямой.

2). Функция не является ни чётной ни нечётной, поскольку

$$y(1)=64e^{-2}\approx 8{,}66;\ y(-1)=28e^{-1}\approx 10{,}30.$$

3). $$\lim_{x\to+\infty}\left(2\left(x^2+9x+22\right)\cdot e^{-\frac{x+3}{2}}\right)=2\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+9x+22}{e^{\frac{x+3}{2}}}=$$

$$=2\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2+9x+22\right)'}{\left(e^{\frac{1}{2}(x+3)}\right)'}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+9}{\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}(x+3)}}=$$

$$=4\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x+9)'}{\left(e^{\frac{1}{2}(x+3)}\right)'}=4\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}(x+3)}}=0;$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2\cdot\left(x^2+9x+22\right)\cdot e^{-\frac{x+3}{2}}\right)=$$

$$=2\cdot\lim_{x\to-\infty}\left(x^2+9x+22\right)\cdot\lim_{x\to-\infty}e^{-\frac{x+3}{2}}=\Big/\begin{matrix}\text{замена}\\ y=-x\end{matrix}\Big/=$$

$$=2\cdot\lim_{x\to-\infty}\left(x^2+9x+22\right)\cdot\lim_{y\to+\infty}e^{y}=2\cdot\infty\cdot\infty=\infty.$$

4). Так как $y(0)=44e^{-\frac{3}{2}}\approx 9{,}8177$, то $A(0;44e^{-\frac{3}{2}})$ — точка пересечения графика с осью Oy.

Для определения точек пересечения графика с осью Ox решим уравнение $y(x)=0$, т. е. $2\cdot\left(x^2+9x+22\right)\cdot e^{-\frac{x+3}{2}}=0$. Так как любая степень числа e положительна, мы можем разделить на $2e^{-\frac{x+3}{2}}$ обе части уравнения:

$$x^2+9x+22=0;\quad D=81-4\cdot 22=-7<0.$$

Поскольку дискриминант отрицателен, уравнение не имеет корней. Иначе говоря, график функции не пересекает ось Ox и поэтому, в силу своей непрерывности, функция $y(x)$ не меняет своего знака на протяжении всей числовой оси. Отсюда вытекает, что $y(x)>0$ для всех действительных чисел x, поскольку $y(0)>0$.

5). Экстремумы. Промежутки возрастания и убывания.

$$y'=2\left(\left(x^2+9x+22\right)'\cdot e^{-\frac{x+3}{2}}+\left(x^2+9x+22\right)\left(e^{-\frac{1}{2}(x+3)}\right)'\right)=$$

$$=2\cdot\left((2x+9)\cdot e^{-\frac{1}{2}(x+3)}-\left(x^2+9x+22\right)\cdot\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(x+3)}\right)=$$

$$=-\left(x^2+5x+4\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}(x+3)}.$$

Для определения критических точек функции решим уравнение

$$y'(x)=0\Leftrightarrow-\left(x^2+5x+4\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}(x+3)}=0\Leftrightarrow x^2+5x+4=0;$$

критические точки — $x_1=-1, x_2=-4$.

$$y'(-5)=-4e;\ y'(-2)=2e^{-\frac{1}{2}};\ y'(0)=-4e^{-\frac{3}{2}}:$$

x	$(-\infty;-4)$	-4	$(-4;-1)$	-1	$(-1;+\infty)$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	минимум	$\nearrow$	максимум	$\searrow$

Локальный минимум — $y(-4)=4e^{\frac{1}{2}}\approx 6{,}595$, локальный максимум — $y(-1)=28e^{-1}\approx 10{,}301$.

6). Используя пункты 3) – 5), получаем, что $\mathrm{E}(y)=(0;+\infty)$.

7). Находим точки перегиба и промежутки выпуклости.

$$y''=\left(y'(x)\right)'=$$

$$=-\left(\left(x^2+5x+4\right)'\cdot e^{-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}}+\left(x^2+5x+4\right)\left(e^{-\frac{1}{2}(x+3)}\right)'\right)=$$

$$=-\left((2x+5)\cdot e^{-\frac{1}{2}(x+3)}-\frac{1}{2}\left(x^2+5x+4\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}(x+3)}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x^2+x-6\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}(x+3)}.$$

$$y''(x)=0\Leftrightarrow x^2+x-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=2,\\ x_2=-3.\end{array}\right.$$

$$y''(-4)=3e^{\frac{1}{2}};\ y''(0)=-3e^{-\frac{3}{2}};\ y''(3)=3e^{-3}.$$

x	$(-\infty;-3)$	-3	$(-3;2)$	2	$(2;+\infty)$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y	вып. вниз	перегиб	вып. вверх	перегиб	вып. вниз

Теперь необходимо найти значение функции и и значение производной (тангенс угла наклона касательной к графику функции) в точках перегиба: $y(-3)=8$; $y'(-3)=2$;

$y(2) = 88e^{-\frac{5}{2}} \approx 7.2235$; $y'(2) = -18e^{-\frac{5}{2}} \approx -1.4775$, и построить касательные графику функции в этих точках.

8). Так как функция $y(x)$ определена на всей числовой оси и $\lim_{x\to-\infty}\frac{y(x)}{x} = \infty; \lim_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x} = 0$, функция имеет правую горизонтальную асимптоту $x = 0$.

9). Строим график функции.

Задача 4. Вычислить неопределённые интегралы а) – г):

а). $\displaystyle\int \frac{\sin 2x \; dx}{1+\cos x}$.

Решение. Решение данной задачи требует знания формулы дифференциала функции $\mathbf{dy = y'(x)\cdot dx}$. Используя тригонометрическую формулу $\mathbf{\sin 2x = 2\sin x\cos x}$, получаем:

$$\int \frac{\sin 2x \; dx}{1+\cos x} = \int \frac{2\sin x\cdot\cos x\, dx}{1+\cos x}.$$

Пусть $y = \cos x$. Тогда $y' = -\sin x$, и, следовательно, $dy = -\sin x\, dx$ по формуле дифференциала. Отсюда $\sin x\, dx = -dy$.

$$\int \frac{2\sin x\cdot\cos x\, dx}{1+\cos x} = \int \frac{2y\cdot(-dy)}{1+y} = -2\int\frac{y\cdot dy}{1+y} =$$
$$= -2\int\frac{(y+1-1)\cdot dy}{y+1} = -2\left(\int\frac{y+1}{y+1}\cdot dy - \int\frac{1}{y+1}\cdot dy\right) =$$
$$= -2\left(\int 1\cdot dy - \int\frac{dy}{y+1}\right) =$$
$$= -2\,(y - \ln|y+1|) = -2\cos x + 2\ln|\cos x + 1| + C.$$

Предпоследнее равенство получено формулам таблицы интегралов:

$$(1)\qquad \int\frac{\mathbf{dx}}{\boldsymbol{x+a}} = \mathbf{\ln|x+a| + C} \text{ и } \int \mathbf{1\cdot dx = x + C}.$$

$\boxed{\textit{Ответ: } 2\ln|\cos x + 1| - 2\cos x + C.}$

б). $\displaystyle\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot \arccos\left(\sqrt{x}\right)\, dx$.

Решение. Решение данной задачи основано на формуле интегрирования по частям: $\boxed{\int u\cdot v'\,dx = u\cdot v - \int u'\cdot v\,dx.}$

В этой формуле принимаем за v' функцию $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Тогда $v = \displaystyle\int\frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x}$ (так как мы находим первообразную, то «$+C$» не пишем).

По формуле $\arccos f(x) = -\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$ находим производную второго сомножителя $u(x) = \arccos\left(\sqrt{x}\right)$:

$$u'(x) = -\frac{\left(\sqrt{x}\right)'}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}} = -\frac{\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}} = -\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x}}$$

Подставляя найденные v,v', u, u' в формулу интегрирования по частям получаем:

$$\int\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\arccos\left(\sqrt{x}\right)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,dx =$$
$$= \arccos\left(\sqrt{x}\right)\cdot\sqrt{x} - \int -\frac{dx}{2\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x}}\cdot\sqrt{x} =$$
$$= \arccos\left(\sqrt{x}\right)\cdot\sqrt{x} - \int\frac{-dx}{2\cdot\sqrt{1-x}} =$$
$$= \arccos\left(\sqrt{x}\right)\cdot\sqrt{x} - \int\frac{d(1-x)}{2\cdot\sqrt{1-x}} = /y = 1-x/ =$$
$$= \arccos\left(\sqrt{x}\right)\cdot\sqrt{x} - \int\frac{dy}{2\cdot\sqrt{y}} =$$
$$= \arccos\left(\sqrt{x}\right)\cdot\sqrt{x} - \sqrt{y} = \arccos\left(\sqrt{x}\right)\cdot\sqrt{x} - \sqrt{1-x} + C.$$

$\boxed{\textit{Ответ: } \sqrt{x}\arccos\sqrt{x} - \sqrt{1-x} + C.}$

в). $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{x^2-5x+6}$.

Решение. Так как корнями знаменателя является $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$, то по формуле $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$, знаменатель раскладываются на множители

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3).$$

Представим дробь в виде следующей суммы:

$$\frac{x}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3},$$

и найдём коэффициенты A и B. Приведём дроби в правой равенства части к общему знаменателю:

$$\frac{x}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-2}^{(x-3}+\frac{B}{x-3}^{(x-2},$$

$$\frac{x}{x^2-5x+6}=\frac{A(x-3)+B(x-2)}{x^2-5x+6}.$$

Приравняв числители, получим

(2) $$x=A(x-3)+B(x-2).$$

Подставляя в последнее равенство $x=2$, находим, что

$$2=A(2-3)\Leftrightarrow 2=A\cdot(-1)\Leftrightarrow A=-2.$$

Подставляя $x=3$ в равенство (2), находим, что

$$3=B(3-2)\Leftrightarrow 3=B\cdot 1\Leftrightarrow B=3.$$

Таким образом, $\dfrac{x}{x^2-5x+6}=\dfrac{-2}{x-2}+\dfrac{3}{x-3}$.

Итак, $\displaystyle\int\frac{x}{x^2-5x+6}=-2\cdot\int\frac{dx}{x-2}+3\cdot\int\frac{dx}{x-3}=$
$=-2\ln|x-2|+3\ln|x-3|+C.$

Здесь мы воспользовались формулой (1).

$\boxed{\text{*Ответ*: } -2\ln|x-2|+3\ln|x-3|+C.}$

г). $\displaystyle\int\frac{6x+5}{x^2+4x+9}\,dx.$

Анализ задачи. Напомним, что в том случае, когда дискриминант квадратного ax^2+bx+c двучлена отрицателен, $D=b^2-4ac<0$, справедливо равенство:

$$\boxed{\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{2}{\sqrt{-D}}\operatorname{arctg}\frac{2ax+b}{\sqrt{-D}}+C.}$$

Решение. Для вычисления интеграла $\displaystyle\int\frac{6x+5}{x^2+4x+9}\,dx$ найдём дискриминант знаменателя $D=16-36=-20$ и рассмотрим функцию $y=x^2+4x+9$. Для последующей замены переменной вычислим производную знаменателя $y'=\left(x^2+4x+9\right)'=2x+4$ и заметим, что $3y'=3\cdot(2x+4)=6x+12$; $6x+5=(6x+12)-7$.

Отсюда, $\displaystyle\int\frac{6x+5}{x^2+4x+9}\,dx=\int\frac{6x+12-7}{x^2+4x+9}\,dx=$

$$=\int\frac{6x+12}{x^2+4x+9}\,dx-7\int\frac{dx}{x^2+4x+9}.$$

Вычислим получившиеся интегралы по-отдельности.

1) $\displaystyle\int\frac{6x+12}{x^2+4x+9}\,dx=\int\frac{3y'\,dx}{y}=3\int\frac{dy}{y}=$
$=3\ln|y|+C=3\ln\left(x^2+4x+9\right)+C.$

2) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+4x+9}=\frac{2}{\sqrt{20}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+4}{\sqrt{20}}\right)+C=$
$=\Big/\sqrt{20}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}=2\sqrt{5}\Big/=\dfrac{2}{2\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2x+4}{2\sqrt{5}}\right)+C=$
$=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x+2}{\sqrt{5}}\right)+C.$

Подставляя полученные выражения, окончательно получаем следующий *ответ*:

$$\boxed{\int\frac{6x+5}{x^2+4x+9}\,dx=3\ln\left(x^2+4x+9\right)-\frac{7}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{\sqrt{5}}\right)+C.}$$

Задача 5. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $\boldsymbol{g(x)=x+4}$ и $\boldsymbol{g(x)=x^2+3x+1}$. Изобразите эту фигуру на координатной плоскости.

Решение. Графиком функции $g(x)$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Вычисляем производную функции $g'(x)=2x+3$ и находим координаты вершины параболы C:

$$g'(x_{\text{в.}})=0\Leftrightarrow x_{\text{в.}}=-\frac{3}{2};\quad y_{\text{в.}}=g\left(-\tfrac{3}{2}\right)=-\frac{5}{4};\quad C\left(-\tfrac{3}{2};-\tfrac{5}{4}\right).$$

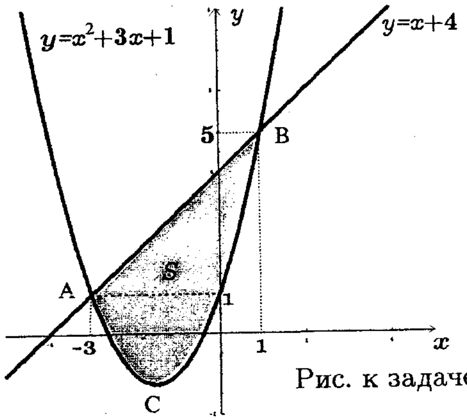


Рис. к задаче 5

Найдём точки пресечения графиков функции: $g(x) = f(x)$.

$$x^2 + 3x + 1 = x + 4 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -3, \\ x_2 = 1. \end{array} \right.$$

Заметим, что $f(-3) = 1$, $f(1) = 5$. Графиком функции $f(x) = x + 4$ является прямая, которую можно построить по двум точкам $A(-3; 1)$ и $B(1; 5)$.

Пусть S — площадь фигуры ABC, ограниченной графиками функций. Так как $f(x) \geqslant g(x)$ при $x \in [-3; 1]$, то

$$S = \int_{-3}^{1} (f(x) - g(x))\, \mathrm{d}x =$$
$$= \int_{-3}^{1} (-x^2 - 2x + 3)\, \mathrm{d}x = \left(-\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x\right)\Bigg|_{-3}^{1} =$$
$$= \left(-\frac{1}{3} - 1 + 3\right) - (9 - 9 - 9) = \frac{32}{3}. \quad \boxed{\textit{Ответ: } \frac{32}{3}.}$$

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Дифференциальное уравнение вида

$$y' = f(x) \cdot g(y) \tag{3}$$

где $f(x), g(x)$ — заданные функции называется дифференциальным уравнение с разделяющимися переменными.

Для решения уравнения такого вида необходимо сделать следующее:

1). Разделить переменные, т. е. преобразовать уравнение к виду

$$p(y) \cdot y' = f(x), \text{ где } p(y) = \frac{1}{g(y)}. \tag{4}$$

2). Проинтегрировать обе части уравнения (4)

$$\int p(y) \cdot y' \mathrm{d}x = \int f(x) \mathrm{d}x, \quad \int p(y) \cdot \mathrm{d}y = \int f(x) \mathrm{d}x,$$

$$P(y) = F(x) + C, \tag{5}$$

где $P(y)$ — первообразная функции $p(y)$, $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$, C — произвольная постоянная.

3). Разрешить, если это возможно, уравнение (5) относительно y (и найти область определения решения): $y = \varphi(x; C)$.

4). Добавить к решению (5) все функции вида $y = a$ (горизонтальные прямые), где число a — один из корней уравнения $g(y) = 0$.

Описанный метод решения можно схематично представить в виде формулы:

$$y' = f(x) \cdot g(y) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x) \cdot g(y) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\, \mathrm{d}x, \\ g(y) = 0, y = \mathrm{const}. \end{array} \right.$$

Задача 6. Найти общее решение дифференциального уравнения $y' = -\dfrac{x}{y}$. Построить графики двух частных решений этого уравнения.

Решение. 1). Преобразуем уравнение к виду $y \cdot y' = -x$.

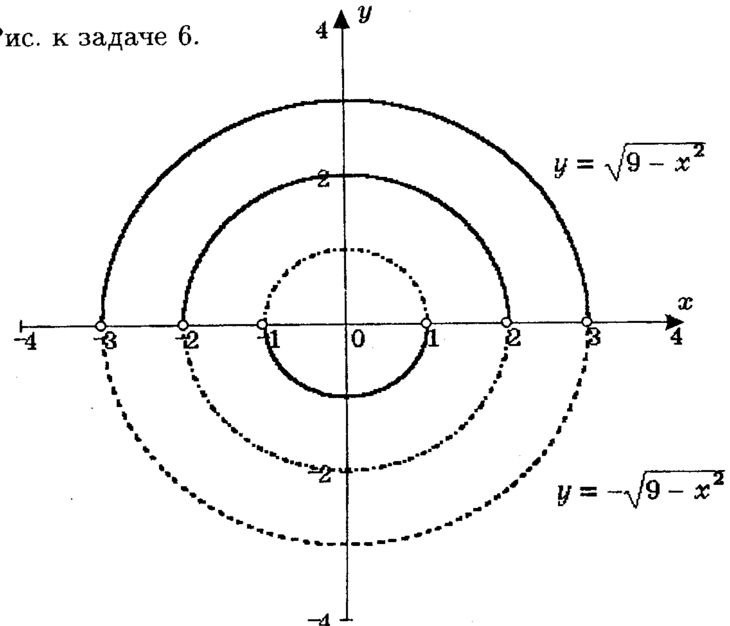
2). $\displaystyle\int y \cdot y' \,\mathrm{d}x = -\int x \,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int y \cdot \mathrm{d}y = -\frac{1}{2} \cdot x^2 + C \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2} \cdot x^2 + C \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(y^2 + x^2\right) = C.$$

Равенство $\frac{1}{2}\left(y^2 + x^2\right) = C$ показывает, что $C > 0$. Положим $C = \frac{1}{2} \cdot R^2$, где $R > 0$ — другая произвольная постоянная. Тогда

$$y^2 + x^2 = R^2.$$

3). Разрешим, предыдущее уравнение относительно y и найдём область определения решения: $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ или $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$, Рис. к задаче 6.



$\mathrm{D}(y) = (-R; R)$, где $R > 0$. Графики решений — дуги концентрических окружностей произвольного радиуса с центром в начале координат (см. рис.).

4). В данном случае, уравнение $g(y) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{y} = 0$; не имеет решений. Поэтому решений вида $y = a$ нет.

Ответ: $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ или $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$, $\mathrm{D}(y) = (-R; R)$, где $R > 0$. $y_{частное\,1} = \sqrt{9 - x^2}$; $y_{частное\,2} = -\sqrt{9 - x^2}$.

Задача 7. Найти частное $\boldsymbol{y_{ч.}(x)}$ решение дифференциального уравнения $\boldsymbol{y' \cdot \sin x - y \cdot \cos x = 3}$, удовлетворяющее (начальному) условию: $\boldsymbol{y_ч(\frac{\pi}{2}) = 3}$, т.е. $\boldsymbol{y = 3}$ при $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{2}}$.

Решение. 1). Разделим обе части уравнения на $\sin x$:

$$y' - \frac{\cos x}{\sin x} y = \frac{3}{\sin x}.$$

Подставляя вместо y произведение двух функций

$$\boxed{y = uv, \quad y' = u'v + uv',}$$

получаем уравнение: $u'v + uv' - \dfrac{\cos x}{\sin x} \cdot uv = \dfrac{3}{\sin x}$;

$$(6) \qquad \underbrace{\left(u' - \frac{\cos x}{\sin x} \cdot u\right)}_{\textit{обращается в } 0} v + uv' = \frac{3}{\sin x}.$$

2). Найдём теперь какую-нибудь функцию u, для которой выполняется равенство

$$u' - \frac{\cos x}{\sin x} \cdot u = 0.$$

Для этого найдём частное решение дифференциального уравнения

$$u' = \frac{\cos x}{\sin x} \cdot u.$$

Если функции равны, то и неопределённые интегралы от них равны:

$$\frac{u'}{u} = \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow \int \frac{u'\,\mathrm{d}x}{u} = \int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sin x} \Leftrightarrow \int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sin x}.$$

Так как нам нужно найти частное решение, полагаем $C = 0$, т. е. приравниваем первообразные подынтегральных функций:

$$\ln u = \ln \sin x \Leftrightarrow u = \sin x.$$

3). Подставляя $y = \sin x$ в уравнение (6), получим

$$0 + \sin x \cdot v' = \frac{3}{\sin x} \Leftrightarrow \sin x \cdot v' = \frac{3}{\sin x} \Leftrightarrow v' = \frac{3}{\sin^2 x};$$

Отсюда $v = \displaystyle\int v'\,\mathrm{d}x = \int \frac{3\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = 3\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -3\,\mathrm{ctg}\,x + C$. Так как всякая функция с точностью до константы равна неопределённому интегралу от собственной производной, то

$$y = u \cdot v = \sin x \cdot (-3 \cdot \mathrm{ctg}\,x + C) =$$

$$= \sin x \cdot \left(-3 \cdot \frac{\cos x}{\sin x} + C\right) = -3 \cdot \cos x + C \sin x.$$

Итак, общее решение дифференциального уравнения имеет вид $y = -3 \cdot \cos x + C \sin x$.

4). Для отыскания частного решения необходимо и достаточно определить значение неопределённой постоянной C по начальному условию, данному в задаче. Используя то условие, что $y_ч = 3$ при $x = \frac{\pi}{2}$, получаем равенство:[4]

$$3 = -3\cos\frac{\pi}{2} + C\sin\frac{\pi}{2} = C.$$

Отсюда $C = 3$. Подставляя найденное значение неопределённой постоянной, получаем частное решение $y_{ч.} = -3\cdot\cos x + 3\sin x$, удовлетворяющее условию, данному в задаче.

$\boxed{\textit{Ответ: } y_{ч.} = 3\,(\sin x - \cos x).}$

Линейные дифференциальные уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Уравнение вида

$$y'' + by' + cy = 0, \qquad (7)$$

где b и c — некоторые числа, называется *линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами*. Общее решение $y_{о.о.}(x)$ этого уравнения в зависимости от знака дискриминанта $D = b^2 - 4c$ характеристического уравнения

$$k^2 + bk + c = 0 \qquad (8)$$

имеют следующий вид:

А) $y_{о.о.} = C_1e^{\alpha x} + C_2e^{\beta x}$, если $D > 0$, где $k = \alpha$, $k = \beta$ — два различных действительных корня ($\alpha \neq \beta$) характеристического уравнения (8);

Б) $y_{о.о.} = (C_1x + C_2)\cdot e^{\alpha\cdot x}$, если $D = 0$,

где α — единственный корень характеристического уравнения;

В) $y_{о.о.} = C_1e^{\alpha x}\cos \ell x + C_2e^{\alpha x}\sin \ell x$, если $D < 0$,

где $\alpha = \frac{b}{2}$ и $\ell = \sqrt{c - \frac{b^2}{4}} = \frac{\sqrt{-D}}{2}$.

Общее решение $y_{о.н.}(x)$ линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + by' + cy = f(x), \qquad (9)$$

[4] $\sin 0 = 0$; $\sin\frac{\pi}{2} = 1$; $\sin\pi = 0$; $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
$\cos 0 = 1$; $\cos\frac{\pi}{2} = 0$; $\cos\pi = -1$; $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

является суммой некоторого его частного решения $y_{ч.}(x)$ и общего решения $y_{о.о.}$ однородного уравнения (7), т. е.

$$y_{о.н.}(x) = y_{о.о.}(x) + y_{ч.}(x).$$

Многочлен $h(k) = k^2 + bk + c$ называют характеристическим многочленом дифференциального уравнения (7).

В тех случаях, когда $f(x)$ представляет собой многочлен, функцию e^{mx}, $\cos mx$ или $\sin mx$, частное решение $y_ч.$ удаётся найти подбором с помощью следующей таблицы.

1. $f(x) = e^{mx}$:

корни характеристического многочлена $h(k)$	частное решение $y_{ч.}(x)$
$m \neq \alpha$, $m \neq \beta$ или $D < 0$	$A\cdot e^{mx}$
$m = \alpha \neq \beta$	$Ax\cdot e^{mx}$
$m = \alpha = \beta$	$Ax^2\cdot e^{mx}$

2. если $f(x)$ — многочлен и $D < 0$ или если ни один из корней характеристического многочлена не равен нулю ($\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$):

правая часть $f(x)$	частное решение $y_{ч.}(x)$
$f(x) = const$ (число)	A
$f(x) = Kx + N$	$Ax + B$
$f(x) = Kx^2 + Px + Q$	$Ax^2 + Bx + C$

3. $f(x) = M\cos\omega x + N\sin\omega x$, где M и N — числа:

$h(k)$	$y_{ч.}(x)$
$h(k) = k^2 + \omega^2$	$x\,(A\cos\omega x + B\sin\omega x)$
$h(k) \neq k^2 + \omega^2$	$A\cos\omega x + B\sin\omega x$

Задача 8. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' + 5y = 5x^2 - 4x + 2$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Решение. 1). Характеристическое уравнение: $k^2 - 2k + 4 = 0$. Так как $D = -16$, используем формулу В): $\alpha = -\frac{-2}{2} = 1$; $\ell = -\frac{\sqrt{-D}}{2} = 2$. Общее решение однородного уравнения:

$$y_{о.о.}(x) = C_1e^x\cos 2x + C_2e^x\sin 2x.$$

2). Так как правая часть $f(x) = 5x^2 - 4x + 2$ — многочлен второй степени, частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде многочлена 2-ой степени с неопределёнными коэффициентами:

$y_{ч.}(x) = Ax^2 + Bx + C,\ y'_{ч.}(x) = 2Ax + B,\ y''_{ч.}(x) = 2A.$

Подставляя $y = y_{ч.}(x)$ в данное в задаче уравнение, получаем:

$$2A - 2(2Ax + B) + 5\left(Ax^2 + Bx + C\right) = 5x^2 - 4x + 2;$$

$$\underline{2A} - \underline{\underline{4Ax}} - \underline{2B} + 5Ax^2 + \underline{\underline{5Bx}} + \underline{5C} = 5x^2 - \underline{\underline{4x}} + \underline{2}.$$

$$5Ax^2 + \underline{\underline{(5B - 4A)\,x}} + \underline{(5C - 2B + 2A)} = 5x^2 - \underline{\underline{4x}} + \underline{2}.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, находим:

$$\begin{cases} 5A = 5, \\ -4A + 5B = -4, \\ 2A - 2B + 5C = 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1, \\ -4 + 5B = -4 \Rightarrow B = 0, \\ 2 + 5C = 2 \Rightarrow C = 0. \end{cases}$$

Отсюда $y_{ч.}(x) = x^2$, поэтому общее решение неоднородного уравнения имеет вид $y_{о.н.}(x) = C_1 e^x \cos 2x + C_2 e^x \sin 2x + x^2$.

3). Находим частное решение, удовлетворяющее начальным условиям, данным в задаче:

$$y(0) = 1 \Rightarrow C_1 e^0 \cos 0 + C_2 e^0 \sin 0 + 0^2 = 1 \Rightarrow C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 1,$$

$$C_1 = 1.$$

$$y'(x) = C_1\left(e^x \cos 2x - 2e^x \sin 2x\right) + C_2\left(e^x \sin 2x + 2e^x \cos 2x\right) + 2x;$$

$$y'(0) = C_1 + 2C_2 = 2 \Rightarrow 1 + 2C_2 = 2 \Rightarrow C_2 = \frac{1}{2}.$$

$\boxed{\textit{Ответ: } y(x) = e^x \cos 2x + \tfrac{1}{2} e^x \sin 2x + x^2.}$

Напомним, что число $n!$ (читается «эн-факториал») — это произведение всех натуральных чисел от единицы до n:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n-1)n.$$

При вычислениях с факториалами представляется важным следующее соображение:

$$\frac{(n+1)!}{n!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdot (n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} = n + 1;$$

$$\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} = (n+1)(n+2);$$

$$\frac{(n+3)!}{n!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} = (n+1)(n+2)(n+3), \text{ и т. д.}$$

Признак Даламбера. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q$, то числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится при $q < 1$ и расходится при $q > 1$.

Задача 9. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^3 \cdot 3^n}{(3n)!}$.

Решение. $|a_n| = \dfrac{(n!)^3 \cdot 3^n}{(3n)!}$; $|a_{n+1}| = \dfrac{((n+1)!)^3 \cdot 3^{n+1}}{(3(n+1))!}$.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{((n+1)!)^3 \cdot 3^{n+1} : (3n+3)!}{(n!)^3 \cdot 3^n : (3n)!} =$$

$$= \frac{((n+1)!)^3 \cdot (3n)! \cdot 3^{n+1}}{(n!)^3 \cdot (3n+3)! \cdot 3^n} = \frac{3 \cdot (n+1)^3}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}.$$

Вычисляем предел $q = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3 \cdot (n+1)^3}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} =$

$$= 3 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n+3} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n+2} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n+1} = 3 \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^3 = \tfrac{1}{9}.$$

$\boxed{\textit{Ответ}\text{: так как } q < 1, \text{ то ряд сходится.}}$

Интервал и радиус сходимости степенного ряда. Каждый степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ сходится внутри интервала $(c-R; c+R)$, где $R \geqslant 0$ — радиус сходимости, определяемый по формуле $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Задача 10. Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot (x-3)^n$.

Решение. Определяем радиус сходимости

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2 \cdot (2n+2)!}{(2n)! \cdot ((n+1)!)^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+6n+2}{n^2+2n+1} = 4.$$

Так как $c = 3$; $c - R = -1$; $c + R = 7$, находим интервал сходимости: $(-1; 7)$. $\boxed{\textit{Ответ}: R = 4;\quad (-1; 7).}$

Упражнения

1. Предел последовательности

1. Дана постоянная последовательность $x_n = 9$ для всех натуральных чисел n. Докажите, используя определение предела последовательности, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 9$.

2. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = 1$.

3. Докажите, используя определение предела последовательности, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+3}{n+1} = 2$.

4. Докажите, используя определение предела последовательности, что $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ при $0 < q < 1$.

5. Докажите, что всякая числовая последовательность может иметь не более одного предела.

6. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} n \sin \dfrac{1}{n} = 1$.

7. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} = \sqrt{e}$.

8. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{2n} = e^2$.

9. Является ли последовательность $x_n = \dfrac{1}{2n}$ бесконечно малой?

10. Является ли последовательность $x_n = (-1)^n$ бесконечно малой?

11. Является ли последовательность $x_n = 1 + \frac{1}{n}$ бесконечно малой?

12. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} (\dfrac{1}{5^n} + 2)$.

13. Найти предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{6^n} + 2\right)$.

14. Найти предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{n}$.

15. Найти предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n}$.

16. Найти предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{5n+1} + \dfrac{\cos n}{10n}\right)$. Объясните, какие свойства пределов и теоремы Вы использовали для вычисления этого предела.

17. Найти предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1}$.

18. Найти предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{n+3}$.

19. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$.

20. Найти предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-n}{3n-1}$.

2. Предел функции. Непрерывность

21. Докажите, что $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$.

22. Найдите, используя определение предела функции, предел функции $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2+2x}$ при $x \to -2$. Используя графические соображения, найдите односторонние пределы $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$.

23. Докажите, что $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{2x} = 1$.

24. Докажите, что $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x^2}{x^2} = 1$.

25. Докажите, что $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{x} = 2$.

26. Докажите, что $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 4x}{\operatorname{tg} 2x} = 2$.

27. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$.

28. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin kx}{x}$, где $k \neq 0$ — постоянная величина.

29. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 9x}{\sin 3x}$.

30. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2}{e^x}$.

31. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x}$.

32. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-2x}$.

33. Найти предел функции

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1}\right).$$

34. Построить график функции $y = [x]$. Является ли функция $y = [x]$ непрерывной в точке $x = 0$?

35. Построить график функции $y = [x] + 1$. Является ли эта функция непрерывной?

3. Производная

36. Найти производную функции $y(x) = 2x + 1$.

37. Найти производную функции $y(x) = \sin 2x$.

38. Найти производную функции $y(x) = \cos 2x$.

39. Найти производную функции $y(x) = x^{10}$.

40. Найти производную функции $y(x) = x^x$.

41. Найти производную функции

$$y(x) = 7x^4 - 3x + 5x - 2.$$

42. Найти производную функции $y(x) = \sqrt{x}$.

43. Найти производную функции $y(x) = \sqrt[3]{x}$.

44. Найти производную функции $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

45. Вычислить производную функции $y = x^2 \cdot \sin 3x$.

46. Вычислить производную функции $y = \frac{x^2}{\cos 4x}$.

47. Вычислить производную функции $y = x^3 \cdot \operatorname{tg} 2x$.

48. Вычислить производную функции $y = \frac{x^3}{\operatorname{ctg} 2x}$.

49. Вычислить производную функции:

$$y = \sqrt{x} \cdot \cos 3x.$$

50. Вычислить производную данной функции $y = \frac{\sqrt{x}}{\sin 2x}$.

51. Вычислить производную функции:

$$y = \sqrt{x} \cdot \sin 4x.$$

52. Пользуясь определением производной как предела отношения приращения функции к приращению аргумента найдите производную функции $y(x) = x^2$.

53. При каком значении параметра p касательная к графику функции $f(x) = x^3 - 3px$, проведённая в точке с абсциссой $x_0 = 2$, параллельна прямой $y = 3x - 5$?

54. Выяснить геометрический смысл теоремя Лагранжа.

55. Выяснить геометрический смысл теоремы Ферма.

56. Найти предел функции, пользуясь правилом Лопиталя,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x + x}{x^2 + x}.$$

57. Используя правило Лопиталя, вычислить предел $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{e^x - 1}$.

58. Найти предел функции, пользуясь правилом Лопиталя

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}.$$

59. Найти предел функции, пользуясь правилом Лопиталя

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x}.$$

60. Найти предел функции (можно воспользоваться правилом Лопиталя)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}.$$

61. Найти предел функции, пользуясь правилом Лопиталя

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{(x^2)} - 1}{\mathrm{e}^x - 1}.$$

62. Найти дифференциал функции $y(x) = x$. Найти дифференциал функции $y(x) = x^a$ в точке $x = 1$.

63. Вычислить $\sin''' x$.

64. Вычислить $(x^3)'''$.

65. Вычислить частные производные функции двух переменных $z = x^2 \cdot \cos 4y$.

66. Вычислить частные производные функции двух переменных $z = x^3 \cdot \operatorname{tg} 4y$.

67. Вычислить частные производные функции двух переменных

$$z = x^2 \cdot \operatorname{tg} 2y.$$

68. Вычислить частные производные функции двух переменных

$$z = x^2 \cdot \sin 5y.$$

69. Вычислить частные производные функции двух переменных

$$z = x^3 \cdot \operatorname{ctg} 5y.$$

70. Вычислить частные производные функции двух переменных:

$$z = x^4 \cdot \operatorname{ctg} 8x.$$

4. Исследование функций

71. Найти а) точки экстремума функции и б) точки перегиба и направления выпуклости графика функции

$$y = \frac{-2x^3 + 15x^2 - 36x}{10}.$$

72. Построить график функции $y = |x|$. Найти точки локального экстремума функции $y = |x|$ и наибольшее значение этой функции на отрезке $[-2; 1]$.

73. Построить график функции $y = |x|$ и найти точку минимума этой функции.

74. Исследовать функцию $y(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ и построить её график.

75. Найти а) точки экстремума функции, б) точки перегиба и направления выпуклости графика функции:

$$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x.$$

76. Найти а) точки экстремума функции, б) точки перегиба и направления выпуклости графика функции:

$$y = \frac{x^3 - 9x^2 + 24x}{4}.$$

77. Найти а) точки экстремума функции, б) точки перегиба и направления выпуклости графика функции:

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x.$$

78. Найти а) точки экстремума функции, б) точки перегиба и направления выпуклости графика функции:

$$y = x^3 - 3x^2 + 3x.$$

79. Приведите пример функции, не обладающей на некотором числовом промежутке наибольшим значением.

80. Найти асимптоты функции $y = x - 2 + \dfrac{1}{x-2}$.

5. Интеграл

81. Вычислить неопределённый интеграл, используя формулу замены переменной

$$\int x\cos x^2 \mathrm{d}x.$$

82. Вычислить неопределённый интеграл, используя формулу замены переменной

$$\int x\cdot \mathrm{e}^{x^2} \mathrm{d}x.$$

83. Вычислить неопределённый интеграл, используя формулу замены переменной

$$\int x^2\cdot \mathrm{e}^{x^3} \mathrm{d}x.$$

84. Используя формулу замены переменной, вычислить неопределённый интеграл $\int x^3\cos x^4 dx$.

85. Вычислить неопределённый интеграл, используя формулу интегрирования по частям

$$\int x\cdot \mathrm{e}^{3x} \mathrm{d}x.$$

86. Вычислить неопределённый интеграл, используя формулу интегрирования по частям

$$\int x\cdot \cos 5x \mathrm{d}x.$$

87. Вычислить неопределённый интеграл, используя формулу интегрирования по частям $\int x\cos 2x dx$.

88. Вычислить неопределённый интеграл, используя метод замены переменной $\int x^2\cdot \mathrm{e}^{x^3} dx$.

89. Вычислить неопределённый интеграл $\int x\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x$

90. Вычислить неопределённый интеграл

$$\int \frac{x^2+4x+2}{2x}\mathrm{d}x.$$

91. Вычислить определённый интеграл $\int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

92. Вычислить определённый интеграл $\int_{-1}^1 (3x^2+2x)\mathrm{d}x$

93. Найти $\int \left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 \mathrm{d}x$.

94. Вычислить определённый интеграл

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x\sin x^2 \mathrm{d}x.$$

95. Вычислить $\int_0^1 (2x^3+7x-3)\mathrm{d}x$.

96. Вычислить $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\mathrm{d}x$.

97. Вычислить $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos 3x\mathrm{d}x$.

98. Вычислить $\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\mathrm{d}x$.

99. Найти $\int \frac{1}{(x-1)(x+1)}\mathrm{d}x$.

100. Найти $\int \frac{x^3-x+1}{(x-1)(x+1)}\mathrm{d}x$.

101. Найти $\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

102. Вычислить $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$.

103. Вычислить неопределённый интеграл $\int \cos 3x\mathrm{d}x$.

104. Приведите пример функции, которую нельзя проинтегрировать в элементарных функциях.

105. Вычислить площадь фигуры, ограниченной следующими линиями:

$$y=4-x^2,\ y=0.$$

106. Вычислить площадь фигуры, ограниченной следующими линиями:

$$y=1-x^2,\ y=0.$$

107. Вычислить площадь фигуры, ограниченной следующими линиями:

$$y = 2 - 3x + x^2,\ y = 0.$$

108. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$ и $y = x$.

109. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 1$, $x = 0, x = 1$ и $y = 0$.

6. Дифференциальные уравнения

110. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y' = x^2 + 4x + 1.$$

111. Найти какое-либо частное решение дифференциального уравнения $y' = y^2 + 1$.

112. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y' = \cos 3x.$$

113. Найти общее решение и частное решение диффеенциального уавнения $y'' = -y$, удовлетвояющее условию $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

114. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' = -y$, удовлетворяющее условию $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

115. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 4y' + 5y = 0.$$

116. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 6y' + 9y = 0.$$

117. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

118. Найти общее решение дифференциального уравынения

$$y'' - 7y' + 10 = 0.$$

7. Ряды

119. Вычислить сумму ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$. Является ли этот ряд абсолютно сходящимся?

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n$. Является ли этот ряд абсолютно сходящимся?

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6^n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{7^n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8^n}$;

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(0{,}1)^n$; ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$; з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.

120. Является ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ абсолютно сходящимся?

Контрольная работа № 1

Формулировки условий задач контрольной работы.

$\boxed{\textbf{1.}}$ Вычислить предел функции.

$\boxed{\textbf{2.}}$ Вычислить производную функции.

$\boxed{\textbf{3.}}$ Исследовать функции $f(x)$ и $g(x)$ построить их графики.

$\boxed{\textbf{4.}}$ Вычислить неопределённые интегралы.

$\boxed{\textbf{5.}}$ Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций $f(x)$ и $g(x)$.

$\boxed{\textbf{6.}}$ Найти общее решение дифференциального уравнения и построить графики двух различных частных решений этого уравнения.

7. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанному условию.

8. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанным условиям.

9. Исследовать ряд на сходимость.

10. Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда.

Вариант 0

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x^2}{x+1}\cdot\dfrac{3x}{x^2-1}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\log_2\left(\dfrac{x-x^2}{1-2x^2}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{\sqrt{5+x}-1}{\sqrt{8-2x}-4}$; г) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{x^2+14x+40}{8x^2+25x-28}$;

д) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-3}\right)^x$.

2. а) $y=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$; б) $y=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\cdot\ln\left(\sqrt[6]{\dfrac{x^3+\sqrt{5}}{x^3-\sqrt{5}}}\right)$;

в) $y=(x^2+1)\cdot\operatorname{arcctg} x\cdot\ln(x^2+1)$; г) $y=(\sin x)^x$.

3. а) $f(x)=\dfrac{3x^2-x^3}{2}$;

б) $g(x)=(2x^2+x+1)\cdot e^{1-x}$.

4. а) $\displaystyle\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$; б) $\displaystyle\int\operatorname{arctg}\sqrt{7x-1}\,dx$;

в) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+2x-3}$; г) $\displaystyle\int\frac{2x\,dx}{x^2-2x+2}$.

5. $f(x)=x-1$, $g(x)=x^2-4x+3$.

6. $y'=\dfrac{2y}{x}$. **7.** $y'\sin x-y\cos x=1$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$.

8. $y''-13y'+12y=12x^2-26x+2$
$y(0)=1$, $y'(0)=1$.

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n\cdot n}{(n+2)!}$. **10.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{n^4\cdot 2^n}$.

Вариант 1

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x^3+1}{2x^2+4x}-\dfrac{3x^2-x}{x+2}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}8^{\frac{x^2-x+3}{3x^2-5}}$;

в) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{8-\sqrt{12x+4}}{2-\sqrt{x-1}}$; г) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{2x^2-9x-5}{x^2-6x+5}$;

д) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{x}\cdot\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^x$.

2. а) $y=\ln(\operatorname{tg} x)$; б) $y=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{2x}}$;

в) $y=e^x\cdot\cos x\cdot\ln(\cos x)$; г) $y=(\cos x)^x$.

3. а) $f(x)=\frac{1}{10}(2x^3-9x^2)$;

б) $g(x)=-\frac{1}{2}(x^2+7x+14)\cdot e^{-\frac{1}{2}x}$.

4. а) $\displaystyle\int\frac{\sin 2x\,dx}{\cos x+1}$; б) $\displaystyle\int\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}\cdot\arcsin\sqrt{1-x}\,dx$;

в) $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{x^2+2x-3}$; г) $\displaystyle\int\frac{x+4}{4x^2+16x+41}\,dx$.

5. $f(x)=\dfrac{x+2}{2}$, $g(x)=\dfrac{-x^2+7x+2}{2}$.

6. $y'=-\dfrac{y}{x}$. **7.** $y'\cos x+y\sin x=-1$, $y(\pi)=-1$.

8. $y'' - 4y' + 4y = e^{3x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n\sqrt{n}}{(n+2)!}$. 10. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(n!)^3}{(3n+1)!} \cdot (x-3)^n.$

Вариант 2

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{4x^3 - x^2 + 1}{2x^2 - 6x} - \dfrac{2x^2}{x-3}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\dfrac{8x^2+7}{2x^2+x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2 - \sqrt{4+2x}}{\sqrt{1-x} - 1}$; г) $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{3x^2 + 13x + 4}{x^2 + 3x - 4}$;

д) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\cos 2x - 1}{(x-\pi)^2}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x-4}{x+3}\right)^x$.

2. а) $y = \dfrac{\sin x + e^x}{e^x - \sin x}$; б) $y = \ln\left(\dfrac{(x+1)^3}{x-1}\right)$;

в) $y = e^x \cdot \sin x \cdot \ln(\sin x)$; г) $y = x^{\cos x}$.

3. а) $f(x) = \frac{3}{4}(x^3 - 3x)$;

б) $g(x) = \frac{2}{3}(x^2 + 5x + 8) \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$.

4. а) $\int \operatorname{ctg} x \, dx$; б) $\int \dfrac{1}{\sqrt{x}} \cdot \operatorname{arcctg}\sqrt{x} \, dx$;

в) $\int \dfrac{x\,dx}{x^2 - 8x + 15}$; г) $\int \dfrac{4x-1}{x^2 - 4x + 5}\, dx$.

5. $f(x) = x - 3, \quad g(x) = x^2 + 4x - 3.$

6. $y' = \dfrac{2y}{x}$. 7. $xy' - y = \dfrac{1}{x}, \quad y(1) = -\dfrac{1}{2}.$

8. $y'' + 2y' - 3y = 3, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+1)! \cdot n}{3^n}$. 10. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{9}{5^n \cdot n^3} \cdot (x-5)^n.$

Вариант 3

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2}{x-3} - \dfrac{x^3}{x^2+3x}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \arcsin\left(\dfrac{x^2+7}{2x^2-x}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{4-x^2} - 2}{\sqrt{1-x} - 1}$; г) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{6x^2 + 7x - 10}{x^2 - 4}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x - \cos 6x}{4x \sin x}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{3x}$.

2. а) $y = \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg} x} + x$; б) $y = \sqrt{x} \cdot \arcsin\sqrt{x} + \sqrt{1-x}$;

в) $y = \cos x \cdot 2x \cdot \ln(2x)$; г) $y = (\sin x)^{\cos x}$.

3. а) $f(x) = \dfrac{4x^3 - 12x^2 - 15x}{16}$;

б) $g(x) = (x+1) \cdot e^{x+3}$.

4. а) $\int \dfrac{dx}{x \cdot \sqrt{1 - \ln^2 x}}$; б) $\int (\cos 3x - 3x \cdot \sin 3x)\, dx$;

в) $\int \dfrac{dx}{x^2 - 8x + 15}$; г) $\int \dfrac{10x - 3}{5x^2 - 6x + 2} dx$.

5. $f(x) = 1 - x, \quad g(x) = 3 - 2x - x^2.$

6. $y' = \dfrac{y}{x}$. 7. $y' \sin x - y \cos x = -1, \; y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$

8. $y'' - 4y + 4 = 0, \quad y(0) = 2 \quad y'(0) = 3.$

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{11^n \cdot n^3}{(n+5)!}$. 10. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^n + 3^n} \cdot (x-1)^n.$

Вариант 4

$\boxed{1.}$ а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x-2}\cdot\dfrac{x+1}{x^2}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\log_3\left(\dfrac{3x^2+3}{x^2+2x}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2-10x-8}{2x^2-9x+4}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}-1}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{1-\cos 2x}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{x+3}\right)^x$.

$\boxed{2.}$ а) $y=\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$; б) $y=\ln\dfrac{x-5}{x+5}$;

в) $y=\dfrac{1}{1+x^2}\cdot\operatorname{arctg}x\cdot\ln(\operatorname{arctg}x)$; г) $y=(\cos x)^{\sin x}$.

$\boxed{3.}$ а) $f(x)=\frac{1}{2}(6x^2-9x-x^3)$,

б) $g(x)=(2x-1)\cdot e^{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}$.

$\boxed{4.}$ а) $\displaystyle\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{1+\ln x}}$; б) $\displaystyle\int(\sin 2x+2x\cdot\cos 2x)\,dx$;

в) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-x-6}$; г) $\displaystyle\int\frac{10x\,dx}{5x^2-4x+1}$.

$\boxed{5.}$ $f(x)=x,\quad g(x)=2+2x-x^2$.

$\boxed{6.}$ $y'=1+y^2$. $\boxed{7.}$ $y'\cos x+y\sin x=-2,\ y(\pi)=-2$.

$\boxed{8.}$ $y''+2y'+5y=5x+7,\quad y(0)=2,\quad y'(0)=0$.

$\boxed{9.}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{10^n}$. $\boxed{10.}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n\cdot(n!)^2}{(2n+2)!}\cdot x^n$.

Вариант 5

$\boxed{1.}$ а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+1}{(2x+3)^3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}8^{\frac{2x^2+5x-1}{3x^2+x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-14x-5}{2x^2-13x+15}$; г) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-2}{3-\sqrt{8-x}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\sin x}{2\cos x-2}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+8}{x-4}\right)^x$.

$\boxed{2.}$ а) $y=x-\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x$; б) $y=\log_3\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$;

в) $y=e^x\cdot x\cdot\ln x$; г) $y=x^{\operatorname{tg}x}$.

$\boxed{3.}$ а) $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2+4}{2}$;

б) $g(x)=(8+5x+x^2)\cdot e^{-\frac{1}{2}x}$.

$\boxed{4.}$ а) $\displaystyle\int\cos 2x\cos x\,dx$; б) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\ln(\sqrt{x})\,dx$;

в) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+2x-8}$; г) $\displaystyle\int\frac{4x-4}{2x^2-6x+5}\,dx$.

$\boxed{5.}$ $f(x)=x^2-x+1,\quad g(x)=x+1$.

$\boxed{6.}$ $y'=2\sqrt{y}$. $\boxed{7.}$ $y'-y=2e^x,\quad y(2)=0$.

$\boxed{8.}$ $y''-y'=\sin x-\cos x,\quad y(0)=2,\quad y'(0)=1$.

$\boxed{9.}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^8}$. $\boxed{10.}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{4^n\cdot n^2}$.

Вариант 6

$\boxed{1.}$ а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{(x+1)^2}\cdot\dfrac{x^2+1}{x-2}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x^2+2}{x-x^2}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{4x^2+11x-3}{3x^2+14x+15}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x+2}-2}{1-\sqrt{x}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x-2}\right)^{2x}$.

$\boxed{2.}$ а) $y=\dfrac{x}{\sin x+\cos x}$; б) $y=x+(1-x)\ln(1-x)$;

в) $y=\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x\cdot\ln(\arcsin x)$; г) $y=x^{\sqrt{x}}$.

$\boxed{3.}$ а) $f(x)=\frac{1}{10}\cdot(2x^3-3x^2-12x-7)$;

б) $g(x)=5\,(x-2)\,e^{x-1}$.

$\boxed{4.}$ а) $\displaystyle\int\cos 2x\sin x\,dx$; б) $\displaystyle\int 3\cdot\sqrt{x}\cdot\ln\sqrt{x}\,dx$;

в) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+3x-4}$; г) $\displaystyle\int\frac{20x-2}{10x^2-6x+1}\,dx$.

$\boxed{5.}$ $f(x)=2-2x^2,\quad g(x)=x+1$.

$\boxed{6.}$ $y'=\dfrac{y+1}{x-1}$. $\boxed{7.}$ $xy'-y=x^4,\quad y(1)=\dfrac{1}{3}$.

$\boxed{8.}$ $y''-10y'+25y=9\cdot e^{2x},\quad y(0)=2,\ y'(0)=7$.

$\boxed{9.}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$. $\boxed{10.}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!\cdot 2^n}\cdot(x+1)^n$.

Вариант 7

$\boxed{1.}$ а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^3+1}{x^2+1}-5\,(x+1)\right)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[6]{\dfrac{3x^2+4}{3x^2+x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-8x-3}{2x^2-11x+15}$; г) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3\cdot\sqrt{x+5}-9}{\sqrt{x}-2}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x^2)-\sin x^2}{2x^2}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-3}\right)^{x}$.

$\boxed{2.}$ а) $y=\dfrac{x+\ln x}{x-\ln x}$; б) $y=\sqrt{2^{\sin 3x}+1}$;

в) $y=3x\cdot\ln(3x)\cdot\sin x$; г) $y=x^{\operatorname{arctg}x}$.

$\boxed{3.}$ а) $f(x)=\frac{1}{2}x^3+3x^2+\frac{9}{2}x+2$;

б) $g(x)=2\cdot(x-3)^2\cdot e^{x-2}$.

$\boxed{4.}$ а) $\displaystyle\int\sqrt{(8-2x)^3}\,dx$; б) $\displaystyle\int(x-1)\cdot e^{-x+2}\,dx$;

в) $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{x^2+3x-4}$; г) $\displaystyle\int\frac{20x-2}{2x^2-2x+1}\,dx$.

$\boxed{5.}$ $f(x)=x^2+3x+1,\quad g(x)=-2x-3$.

$\boxed{6.}$ $y'=-y\cdot\operatorname{tg}x$. $\boxed{7.}$ $y'\cos x+y\sin x=1,\ y\,(2\pi)=1$.

$\boxed{8.}$ $y''+4y-4x=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=3$.

$\boxed{9.}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{3^n}$. $\boxed{10.}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2\cdot 4^n}\cdot(x-2)^n$.

Вариант 8

$\boxed{1.}$ а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+1}{x^2-2}-(x-1)\right)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\log_2\left(\dfrac{2x^2+x}{x^2+8}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1-\sqrt{5x-9}}{3-\sqrt{5x-1}}$; г) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-x-30}{2x^2-11x-6}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{\cos 2x-1}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{2x}$.

$\boxed{2.}$ а) $y=\dfrac{1+x^3}{1-x^3}$; б) $y=\dfrac{3}{4}\left(\sqrt[4]{x^3}+\ln\left(\sqrt[4]{x^3}+1\right)\right)$;

в) $y=(\sin x)\cdot e^{2x}\cdot\ln(\sin x)$; г) $y=(\sin x)^{\ln x}$.

$\boxed{3.}$ а) $f(x)=2x^3-9x^2+12x-5$;

б) $g(x)=2(x-6)^2\cdot e^{\frac{1}{2}x-3}$.

$\boxed{4.}$ а) $\int \frac{\cos(\sqrt{x})\, dx}{2\cdot\sqrt{x}}$; б) $\int 16x\cos 4x\, dx$;

в) $\int \frac{x\, dx}{x^2+2x-35}$; г) $\int \frac{18x-3}{9x^2-18x+10}dx$.

$\boxed{5.}$ $f(x) = -3x^2+21x-11, \quad g(x) = 3x+4$

$\boxed{6.}$ $y' = \frac{2y}{x+1}$. $\boxed{7.}$ $y'\cos x + y\sin x = 2,\ y(\pi) = 2$.

$\boxed{8.}$ $y'' - y' - 6y = 2\sin 2x - 10\cos 2x,$
$y(0) = 2,\ y'(0) = 3$.

$\boxed{9.}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+2)!}{n!\cdot 2^n}$. $\boxed{10.}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\cdot 2^n}{n\cdot 3^n}\cdot(x+2)^n$.

Вариант 9

$\boxed{1.}$ а) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x-x^2}{x-2}+\frac{x^3}{x^2+1}\right)$; б) $\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{4-x^2}{x-x^2}}$;

в) $\lim_{x\to 6}\frac{2-\sqrt{x-2}}{6-\sqrt{5x+6}}$; г) $\lim_{x\to -5}\frac{2x^2+5x-25}{3x^2+13x-10}$;

д) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{\arcsin x}$; е) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{3x}$.

$\boxed{2.}$ а) $y = \frac{1+10^x}{1-10^x}$; б) $y = e^{\sqrt{\sin x+\cos x}}$;

в) $y = \frac{1}{1+x^2}\cdot \operatorname{arctg} x\cdot \ln(\operatorname{arctg} x)$; г) $y = (\cos x)^{\ln x}$.

$\boxed{3.}$ а) $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 2x^2 + 4x$;
б) $g(x) = (2x^2-5x+4)\cdot e^x$.

$\boxed{4.}$ а) $\int x\cdot\sqrt{x^2-1}\,dx$; б) $\int (1+3x^2)\cdot \operatorname{arctg} x\, dx$;

в) $\int \frac{dx}{x^2+2x-35}$; г) $\int \frac{16x-16}{8x^2-4x+1}\, dx$.

$\boxed{5.}$ $f(x) = 2x-3, \quad g(x) = -x^2+3x-1$.

$\boxed{6.}$ $y' = y\operatorname{ctg} x$, $\boxed{7.}$ $y'\cdot\cos x + y\sin x = 3,\ y(\pi) = 3$.

$\boxed{8.}$ $y'' - 14y' + 49y = 64\cdot e^{-x}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 6$.

$\boxed{9.}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)^2}{2^n}$. $\boxed{10.}$ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{((2n)!)^2}{(4n)!}\cdot x^n$.

Таблицы и формулы

1. Производные основных элементарных функций

1). Производная константы равна нулю: $C' = 0$.

2). $(x^a)' = a\cdot x^{a-1}$, где a — любое не равное нулю действительное число. В частности, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

3). Показательная и логарифмическая функции.

$$(a^x)' = \ln a\cdot a^x;\quad \log_a' x = \frac{1}{x\cdot\ln a};$$

$$(e^x)' = e^x;\quad \ln' x = \frac{1}{x}.$$

4). Тригонометрические функции	
$(\sin x)' = \cos x$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

5). Обратные тригонометрические функции	
$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

2. Производные некоторых сложных функций:

1. $(u^a(x))' = au^{a-1}(x)\cdot u'(x)$
2. $\left(\sqrt{u(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$;
3. $(e^{u(x)})' = u'(x)e^{u(x)}$;
4. $(a^{u(x)})' = u'(x)a^{u(x)}\ln a$;
5. $(\ln u(x))' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$;
6. $(\log_a u(x))' = \dfrac{1}{\ln a}\cdot\dfrac{u'(x)}{u(x)}$;
7. $(\arcsin u(x))' = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$;
8. $(\arccos u(x))' = -\dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$;
9. $(\sin u(x))' = u'(x)\cos u(x)$;
10. $(\cos u(x))' = -u'(x)\sin u(x)$;
11. $(\operatorname{tg} u(x))' = \dfrac{u'(x)}{\cos^2 u(x)}$;
12. $(\operatorname{ctg} u(x))' = -\dfrac{u'(x)}{\sin^2 u(x)}$.

Правила дифференцирования

3. $\big(f(x+C)\big)' = f'(x+C)$;

4. Константы можно выносить за знак производной

$$\big(C\cdot u(x)\big)' = C\cdot u'(x).$$

5. Производная суммы равна сумме производных

$$\big(f(x)\pm g(x)\big)' = f'(x)\pm g'(x).$$

6. $\big(f(x)g(x)\big)' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$.

7. $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$. 7'. $\left(\dfrac{1}{v(x)}\right)' = \dfrac{-v'(x)}{v^2(x)}$.

7. $\big(f(kx+b)\big)' = kf'(kx+b)$.

8. Пусть $y = f(u(x))$ — сложная функция, $y = f(u)$ и $u = u(x)$.
Тогда: $y'(x) = f'(u(x))\cdot u'(x)$.

9. Интегрирование, также как и операция дифференцирования, операция вычисления пределов, является линейной; то есть, константы можно выносить за знак интеграла, и интеграл суммы функций равен сумме интегралов. Линейность операции\интегрирования можно выразить формулой:
$\int\big(af(x)+bg(x)\big)\,dx = a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx$.

10. Таблица основных неопределённых интегралов

1). $\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C$

2). $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|+C$;

3). $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$;

$\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$

4). $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$;

$\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}+C$;

5). $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C$;

6). $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C$;

7). $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$;

8). $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

9). $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$;

$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}+C$;

10). $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$;

11). $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{2ax+b}{2\sqrt{a}}+\sqrt{ax^2+bx+c}\right|+C$
при $a>0$.

11. Замена переменных (метод подстановки):
Если $t = t(x)$, то $t'\,dx = dt$. Эта формула позволяет интегрировать произведения, одним из сомножителей которых служит сложная функция $\int f(t(x))t'(x)\,dx = \int f(t)\,dt$.

12. Интегрирование по частям:

$$\int u(x) \cdot v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x.$$

13. Интегрирование простейших дробей:

I. $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}\,\mathrm{d}x = A \ln|x-a| + C;$

II. $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^m}\,\mathrm{d}x = -\frac{A}{m-1} \cdot \frac{1}{(x-a)^{m-1}} + C;$ при $m \geqslant 2$;

III. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+px+q} = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$

14. Если $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)+C$, то $\int f(kx+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k} \cdot F(kx+b)+C$.

15. Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ — первообразная, вычисляемая как неопределённый интеграл с $C = 0$.

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Методические указания и контрольные задания

Часть 1.

Высшая математика

Выпуск 1.

(1-ый семестр)

В авторской редакции

Подписано в печать 01.09.2003 г. Формат 60х84/16. Бумага офсетная.
Гарнитура Times New Roman. Объем 4 п.л. Тираж 1000 экз.
Цена договорная. Изд. зак. № 185. Тип. зак. № 303
ул.Смольная,36, г. Москва, А-445, ГСП-3, 125993
Издательство Российского государственного торгово-экономического университета