Составители: Т.Р.Игонина, О.А.Малыгина, И.С.Пулькин, Т.С.Хачлаев, А.Л.Шелепин

Редактор Ю.И.Худак

Контрольные задания содержат типовой расчет по дифференциальным уравнениям для студентов II курса факультетов ВМС и Кибернетики. Типовые расчеты выполняются студентами в письменном виде и сдаются преподавателю до начала зачетной сессии. Вопросы к зачету или экзамену могут быть уточнены и дополнены лектором. При составлении контрольных заданий за основу были взяты типовые расчеты, разработанные коллективом кафедры высшей математики.

Печатаются по решению редакционно-издательского совета университета.

Рецензенты: И.А.Соловьев
С.Ф.Свистова

Контрольные задания напечатаны в авторской редакции

Подписано в печать 24.06.2009. Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 0,93. Усл. кр.-отт. 3,72. Уч.-изд. л. 1,0
Тираж 200 экз. С 403

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Московский государственный институт радиотехники,
электроники и автоматики (технический университет)"
119454, Москва, пр. Вернадского, 78

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

III семестр

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ

Задача 1. Найти общее решение уравнения
$$y'' + ay' + by = f(x),$$
используя характеристическое уравнение и метод вариации произвольных постоянных.

№	a	b	$f(x)$	№	a	b	$f(x)$
1	0	−1	$\dfrac{e^x}{e^x-1}$	16	0	−1	$\dfrac{1}{e^x+1}$
2	−2	1	$\dfrac{e^x}{\sqrt{x}}\ln x$	17	−2	1	$e^x x\ln x$
3	−5	6	$\dfrac{e^{3x}}{e^x+2}$	18	5	6	$\dfrac{1}{e^{3x}-e^{4x}}$
4	0	1	$\dfrac{1}{\sin 2x}$	19	0	4	$\dfrac{1}{\sin 4x}$
5	−1	0	$\dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}$	20	1	0	$\dfrac{1}{e^{2x}\sqrt{e^{2x}+1}}$
6	−2	2	$\dfrac{e^x}{\sin^2 x}$	21	−2	5	$e^x \operatorname{tg} 2x$
7	0	−4	$\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$	22	0	−4	$\dfrac{1}{e^{2x}-1}$
8	2	1	$\dfrac{\ln(x+1)}{e^x}$	23	2	1	$\dfrac{x\ln(1-x)}{e^x}$
9	−7	12	$\dfrac{e^{4x}}{e^x-3}$	24	7	12	$\dfrac{1}{e^{4x}+2e^{5x}}$
10	0	9	$\dfrac{1}{\cos^3 3x}$	25	0	16	$\operatorname{tg}^2 4x$
11	−2	0	$e^{2x}\sqrt{1-e^{4x}}$	26	2	0	$\sqrt{e^{4x}+1}$

Продолжение задачи 1							
№	a	b	$f(x)$	№	a	b	$f(x)$
12	2	2	$\dfrac{1}{e^x\cos^2 x}$	27	2	5	$\dfrac{\operatorname{ctg} 2x}{e^x}$
13	0	-9	$\dfrac{e^{3x}}{2-e^{3x}}$	28	0	-9	$\dfrac{1}{2e^{3x}+1}$
14	-6	9	$e^{3x}\ln(x^2+1)$	29	6	9	$\dfrac{\ln(x^2-2)}{e^{3x}}$
15	-4	13	$\dfrac{e^{2x}}{\cos^2 3x}$	30	4	13	$\dfrac{\operatorname{tg}^2 3x}{e^{2x}}$

Задача 2. $L(y) = a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y$.
1) Проверить, что $y_1(x)$ есть частное решение однородного уравнения $L(y) = 0$. Зная это, найти общее решение уравнения $L(y) = 0$.
2) Найти общее решение неоднородного уравнения $L(y) = f(x)$ с заданной правой частью $f(x)$, предположив, что одно из частных решений уравнения $L(y) = f(x)$ является многочленом.

№	$a(x)$	$b(x)$	$c(x)$	$y_1(x)$	$f(x)$
1	x^2	$-4x$	6	x^2	$2x^4$
2	x^2	x	-1	x	$3x^2-1$
3	x^2+1	$-2x$	2	x	$2x^3+6x$
4	$x-1$	$-x$	1	x	x^3-3x
5	x^2	$-x$	1	x	$4x^3-x^2$
6	x	2	x	$(\sin x)/x$	x^3
7	x	2	$-x$	e^x/x	x^3+2x

Продолжение задачи 2					
№	$a(x)$	$b(x)$	$c(x)$	$y_1(x)$	$f(x)$
8	x^4	0	-1	$xe^{1/x}$	$2x^4-x^2$
9	x^4	$2x^3$	-1	$e^{1/x}$	$6x^4-x^2$
10	x^2	$-2x$	2	x	$3x^4-1$
11	x^2	$-x$	-3	x^3	x^2-1
12	x^2	0	-2	x^2	$2x^3-x$
13	x^2	x	-4	$1/x^2$	$5x^3+3x$
14	x^2	$4x$	2	$1/x$	$3x^2-2x$
15	x^4	0	1	$x\sin(1/x)$	$6x^5+x^3$
16	x^2	$-4x$	6	x^3	$2x^4+2x$
17	x^2	x	-1	$1/x$	$-3x^2-1$
18	x^2+1	$-2x$	2	x^2-1	$6x^4+12x^2$
19	$x-1$	$-x$	1	e^x	x^2-2x
20	x^2	$-x$	1	$x\ln x$	x^2+1
21	x	2	x	$(\cos x)/x$	x^2+2
22	x	2	$-x$	e^{-x}/x	x^2-2
23	x^4	0	-1	$xe^{-1/x}$	$6x^5-x^3$
24	x^4	$2x^3$	-1	$e^{-1/x}$	$12x^5-x^3$
25	x^2	$-2x$	2	x^2	x^3
26	x^2	$-x$	-3	$1/x$	$3x^2+4x$

Продолжение задачи 2					
№	$a(x)$	$b(x)$	$c(x)$	$y_1(x)$	$f(x)$
27	x^2	0	-2	$1/x$	$5x^4 - x$
28	x^2	x	-4	x^2	$5x^3 - 4$
29	x^2	$4x$	2	$1/x^2$	$x^2 + 2x$
30	x^2	$-6x$	12	x^3	$6x^5$

V **Задача 3.** Решить задачу Коши

$$y'' + ay' + by = f(x),\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$$

а) с помощью формулы Дюамеля, решив предварительно вспомогательную задачу Коши

$$z'' + az' + bz = 1,\ z(0) = 0,\ z'(0) = 0.$$

б) методом неопределенных коэффициентов (подбором частного решения неоднородного уравнения по правой части).

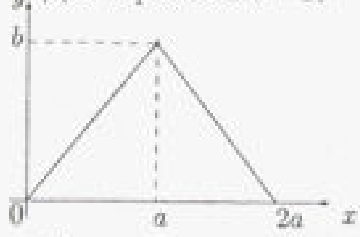
№	a	b	$f(x)$	№	a	b	$f(x)$	№	a	b	$f(x)$
1	-3	2	e^x	11	-1	-2	e^{-x}	21	-7	10	e^x
2	3	-4	x^2+1	12	0	-4	$\cos x$	22	1	-6	x^2+2x
3	3	2	e^{3x}	13	0	-1	x^2+x	23	0	-9	e^{3x}
4	0	-1	$\cos x$	14	1	0	x^2-1	24	1	-2	e^{2x}
5	3	0	xe^x	15	6	-7	e^{-4x}	25	-1	-2	x^2+1
6	0	-9	e^{-3x}	16	-2	1	e^x	26	-1	-30	e^{-x}
7	-1	0	e^{2x}	17	-2	-3	e^{2x}	27	0	1	$\sin x$
8	2	-3	$x+1$	18	-5	6	e^{-x}	28	0	-4	e^{2x}
9	0	-1	xe^x	19	-3	-4	e^{3x}	29	1	-2	$x+1$

Продолжение задачи 3											
№	a	b	$f(x)$	№	a	b	$f(x)$	№	a	b	$f(x)$
10	3	-4	$\sin x$	20	0	-9	x^2	30	4	0	e^{4x}

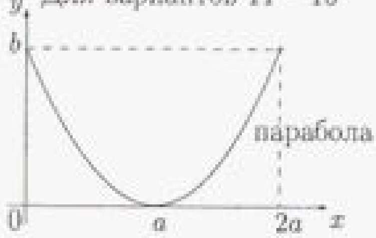
Задача 4. Найти изображение периодического оригинала с периодом $T = 2a$. На рисунках указан вид его графика на одном периоде.

Для вариантов 1 – 5

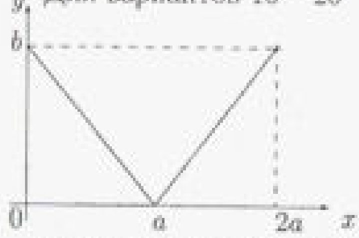
Для вариантов 6 – 10



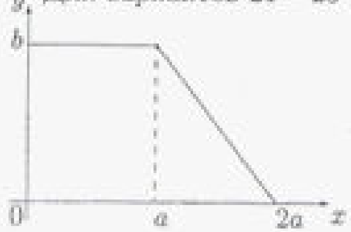
Для вариантов 11 – 15



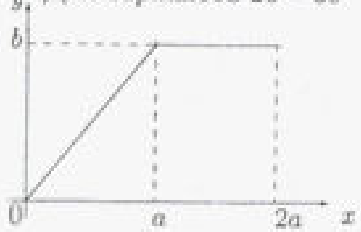
Для вариантов 16 – 20



Для вариантов 21 – 25



Для вариантов 26 – 30



Выбор чисел a и b:

номера вариантов	a	b
1, 6, 11, 16, 21, 26	1	2
2, 7, 12, 17, 22, 27	1	1
3, 8, 13, 18, 23, 28	2	1
4, 9, 14, 19, 24, 29	2	2
5, 10, 15, 20, 25, 30	2	3

Задача 5. Операторным методом найти решение задачи Коши

$$y'' + 2\alpha y' + (\alpha^2 + \beta^2)y = (Ax + B)e^{\gamma x}, \; y(0) = y_0, \; y'(0) = y_0'.$$

Для четных вариантов $A = 1$, $B = 0$, $y_0 = 1$, $y_0' = 1$;
для нечетных вариантов $A = 0$, $B = 1$, $y_0 = 1$, $y_0' = 0$.

№	α	β	γ	№	α	β	γ	№	α	β	γ
1	2	1	−1	11	1	1	2	21	1	2	−1
2	−2	2	1	12	−2	1	1	22	1	3	−2
3	1	4	−3	13	1	4	2	23	−1	1	3
4	−1	1	−1	14	−1	2	1	24	−1	1	−2
5	−1	3	2	15	−1	3	3	25	−1	4	−2
6	2	1	−1	16	2	1	−2	26	2	1	1
7	2	2	−3	17	2	2	2	27	2	3	−1
8	1	1	1	18	1	1	−2	28	−1	1	2
9	−2	1	−1	19	−2	2	−1	29	−2	1	2
10	2	2	−1	20	−2	3	1	30	1	1	−1

Задача 6. Решить систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \qquad \frac{dy}{dt} = cx + dy.$$

с начальными условиями $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ следующими методами:

а) сведением к уравнению второго порядка;
б) операторным методом.
в)* Операторным методом найти матричную экспоненту e^{At} и с помощью нее решить для этой системы задачу Коши.
г) Определить характер фазового портрета точки покоя для линейной системы. Найти собственные значения и собственные векторы, нарисовать эскиз фазового портрета.

№	a	b	c	d	x_0	y_0	№	a	b	c	d	x_0	y_0
1	1	4	1	1	1	1	2	3	2	−2	−1	1	−1
3	2	4	−1	−3	−1	1	4	3	−1	4	−2	−1	−1
5	2	5	−1	−2	1	2	6	2	5	−1	−2	−1	−2
7	3	−2	5	−3	1	−2	8	−2	2	−4	2	1	3
9	1	−1	5	−1	−1	2	10	1	2	3	−4	2	−1
11	1	2	−1	4	1	1	12	2	−2	−2	2	1	−1
13	1	−1	5	−3	−1	1	14	1	−5	2	−1	−1	−1
15	2	5	1	−2	1	2	16	3	−5	1	−3	2	1
17	2	−2	4	−2	1	−2	18	2	3	−2	−5	3	1
19	−2	−3	2	5	2	−1	20	1	1	−1	1	1	1
21	−1	1	−2	−3	1	−1	22	2	3	4	−2	−1	1
23	3	−5	5	−3	1	2	24	1	2	2	1	2	1
25	−1	1	4	−1	1	−2	26	1	−1	2	3	−1	2
27	4	5	−4	−4	1	1	28	4	3	3	−4	1	−1
29	2	3	3	2	1	3	30	2	−1	3	−2	−1	1

Задача 7: (выполняется по усмотрению преподавателя группы)
Найти все точки покоя системы двух дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = (x - a)(y - b) \\ \dot{y} = x^2 + cxy + y^2 + dx + ey + f. \end{cases}$$

Линеаризовать систему в окрестности той точки покоя $(x_0; y_0)$, в которой максимальна сумма $x_0 + y_0$. Определить характер фазового портрета для этой точки покоя, исследовать ее на устойчивость.